SERIE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PARA LA CULTURA DE ANTIOQUIA

Diploma en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia

Módulo 3

Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas

Autores
Oscar Fernando Gallo Mesa
Jesús María Gutiérrez Mesa
Carlos Mario Jaramillo López
Orlando Monsalve Posada
John Jairo Múnera Córdoba
Gilberto de Jesús Obando Zapata
Fabián Arley Posada Balvín
Guillermo Silva Restrepo
María Denis Vanegas Vasco

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

GOBERNACION DE ANTIOQUIA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PARA LA CULTURA

ANTIOQUIA NUEVA, un hogar para la vida

Módulo 3
Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas

ISBN: 958-9172-84-1
Tiraje: 3.100 ejemplares

Primera edición, 2006.

Gobernación de Antioquia.
Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia
Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.
www.seduca.gov.co
Email: pcalidad@seduca.gov.co

Diseño, diagramación e impresión:
Editorial Artes y Letras Ltda.

Medellín, Colombia 2006

Agradecimientos

LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PARA LA CULTURA DE ANTIOQUIA Y LA FACULTAD DE EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA, agradecen la labor de coordinación del DIPLOMADO *DESARROLLO DE COMPETENCIAS BÁSICAS EN MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA del Departamento de Antioquia* a su equipo técnico, a todos los docentes que participaron de él, y en particular, a las siguientes personas e instituciones educativas que hicieron posible llevarlo a feliz término:

- INTEGRANTES DE LA MESA DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICAS.
- Rectores de las Instituciones Educativas donde laboran los docentes integrantes de la MESA DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICAS.
- A los docentes del DIPLOMADO EN DESARROLLO DE COMPETENCIAS BÁSICAS EN MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA del Departamento de Antioquia por la lectura y sugerencias.
- Al comité académico del DIPLOMADO EN DESARROLLO DE COMPETENCIAS BÁSICAS EN MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA del Departamento de Antioquia por el trabajo realizado en pro de esta obra.
- A la FACULTAD DE EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA, a través de sus programas de EDUCACIÓN MATEMÁTICA por apoyar la consolidación del GRUPO ACADÉMICO que desarrolla el DIPLOMADO.
- Agradecimientos a los profesores María Denis Vanegas Vasco y Jesús María Gutiérrez Mesa, por su contribución para que este módulo se hiciera posible como fruto de dos años de estudio e investigación.

Contenido

Unidad No.5
SITUACIONES RELACIONADAS CON LA MAGNITUD LONGITUD

Introducción

La medida de las magnitudes, en el contexto escolar, requiere de una reflexión sobre las relaciones entre las Matemáticas y la realidad; ésta cual no parece ser tenida en cuenta por muchos docentes de Matemáticas. Generalmente los estudiantes se ven sometidos a procesos de medición con instrumentos refinados y complejos, e incluso se enfrentan a tareas de conversión de unidades, sin haberse acercado conceptualmente a las magnitudes y sus medidas, y sin darse cuenta de la necesidad misma de medir. Frecuentemente se inician los temas de las magnitudes directamente con el manejo de patrones Estandarizados de medida, múltiplos y submúltiplos, y éstos en contextos aritméticos, aplicando tablas y factores de conversión, reduciendo la conceptualización de las magnitudes y sus medidas al proceso de agregar y quitar ceros; es decir, que no se establecen nexos entre el tratamiento físico de las magnitudes y el tratamiento matemático.

De otro lado, en los textos escolares, por lo general, aparecen unidades temáticas que se refieren a las magnitudes: "Áreas de las figuras planas"; "Sistema Métrico Decimal"; "Unidades de superficie"; "Unidades de volumen"; "Otras magnitudes", en las cuales, si bien se tratan las magnitudes, se hace de forma aislada y algorítmica. Tanto el texto, como los estudiantes y los docentes se ubican en un contexto de solución de ejercicios y de algunos problemas que involucran magnitudes; éstos no son considerados en contextos de medición y como tal en el proceso de su solución.

A pesar de las propuestas del MEN en relación con el desarrollo del pensamiento métrico y algunos trabajos didácticos al respecto en el medio; en numerosas instituciones no se enseñan los temas relativos a las magnitudes y su medición, y cuando se hace, no se tienen en cuenta los elementos de carácter didáctico recomendados. Esto demanda, por parte de quienes se dedican a la enseñanza de las Matemáticas un análisis profundo y un planteamiento de formas adecuadas para el desarrollo de lo que los lineamientos denominan "pensamiento métrico".

El reconocimiento de las magnitudes y los conceptos relativos a ellas, en contextos propios de medición y están inmersos en la vida cotidiana y en relación con las ciencias naturales, son elementos que propician el desarrollo del pensamiento métrico, el cual se puede expresar como ese conjunto de habilidades para reconocer las magnitudes y sus medidas en diferentes contextos.

En éste módulo, se pretende dar una mirada a los contextos para desarrollar el pensamiento métrico en los estudiantes de Educación Básica y media, retomando los elementos teóricos y metodológicos de los que deben apropiarse los docentes para tal fin, según la propuesta del MEN a través de los Lineamientos Curriculares y los Estándares básicos de Matemáticas y por lo tanto consta de:

- Una primera unidad relacionada con un estudio sistemático del desempeño de los estudiantes en torno al pensamiento métrico.
- La unidad dos, describe las propuestas del MEN con relación al pensamiento métrico, a través de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares básicos.
- En una tercera unidad, se encuentran algunas ideas relacionadas con el desarrollo histórico y epistemológico de las magnitudes y sus medidas.
- Luego en una cuarta unidad se desarrollan unos elementos teóricos sobre las magnitudes y sus medidas.
- Y en las tres últimas unidades se presenta el desarrollo conceptual de las magnitudes longitud, área y volumen, a través de algunas situaciones problema y su análisis teórico y didáctico.

Es muy importante que los docentes que lean este material, hagan sus aportes y sugerencias a las situaciones propuestas, las cuales están en proceso de validación, por lo tanto al llevarlas a las aulas, se encontrarán aspectos que enriquecen la reflexión con relación a este material.

Unidad No.1

Desempeño de los estudiantes en torno al Pensamiento Métrico

Demos una mirada a los desempeños o resultados de los estudiantes en pruebas de carácter internacional, como son las pruebas TIMSS, y, en el ámbito nacional, a los resultados en las pruebas SABER.

1.1. Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias: TIMSS

El Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias TIMSS, fue un proyecto de investigación y evaluación curricular en la enseñanza de las Matemáticas y las ciencias naturales, en la Educación Básica en diferentes países. En dicho estudio se analizaron tres perspectivas del Currículo: el propuesto, el desarrollado y el logrado. Además se pretendía identificar características de la educación en Matemáticas y en Ciencias y los factores asociados de éxito o de fracaso[1] (MEN, 1997).

Este análisis es de gran ayuda, porque permite identificar tendencias de los estudiantes colombianos en Matemáticas, específicamente, en lo relativo a los conceptos sobre las magnitudes y sus medidas. Allí, los conocimientos evaluados tuvieron que ver con el reconocimiento y uso de magnitudes y unidades estándar, de longitud, peso, capacidad, tiempo, amplitud de ángulos y equivalencia entre ellas; las medidas de perímetro y área; los procesos de estimación y el cálculo del error. El análisis se hizo sobre los siguientes aspectos:

- Uso del conocimiento
- Uso de procedimientos de rutina
- Investigación y solución de problemas
- Razonamiento matemático
- Comunicación

El análisis de los resultados del TIMSS refleja cómo la medición es una de las áreas de mayor dificultad, o la menos conocida de las demás áreas temáticas; como afirma MEN (1997): la "medición, es una de las áreas particularmente críticas para los estudiantes colombianos de 7º y 8º" (p 121). Además, el número de preguntas que responde bien los estudiantes internacionales excede significativamente al de las que responden bien los

[1] Este es el último estudio internacional relativo a la enseñanza de las Matemáticas.

estudiantes colombianos. Mientras que los estudiantes colombianos se revelan preparados para resolver bien sólo un 15% o 20% de las preguntas del área; los estudiantes internacionales se revelan preparados para resolver bien el 52% de ellas. A continuación se presentan los resultados del rendimiento promedio por temas evaluados y el rendimiento promedio por tipos de desempeño evaluados:

- **Rendimiento promedio por temas evaluados**

CÓDIGO	DESEMPEÑO	NACIONAL		INTERNACIONAL	
		Séptimo	Octavo	Séptimo	Octavo
	GLOBAL	26.8	30.3	49.8	55.6
1.2	Medición	23.4	26.7	47.1	52.5
1.2.1	Unidades	36.1	39.3	58.1	62.6
1.2.2	Perímetro, área y volumen	7.3	11.2	30.9	38.1
1.2.3	Estimación y error	26.9	29.3	54.7	58.5

Tabla No1. Resultados de las pruebas TIMSS[2]

El ítem 1.2.1 evalúa los conceptos de medida y unidades estándar: la comparación de objetos, el uso de unidades estándar, el sistema inglés y el métrico, el uso apropiado de instrumentos, la precisión y la confiabilidad, medidas comunes de longitud, área, volumen, capacidad, tiempo, temperatura, masa, ángulos; cocientes y productos de unidades; análisis dimensional.

El ítem 1.2.2 evalúa los conceptos de perímetro, área y volumen, y el uso de fórmulas para determinar áreas, perímetros y volúmenes.

El ítem 1.2.3 evalúa lo relativo a estimaciones y errores: estimación en la medición, errores en la medición, precisión y confiabilidad de las mediciones.

- **Rendimiento promedio por tipos de desempeño evaluados.**

CÓDIGO	DESEMPEÑO	NACIONAL		INTERNACIONAL	
		Séptimo	Octavo	Séptimo	Octavo
	GLOBAL	26.8	30.3	49.8	55.6
2.2	Medición	23.4	26.7	47.1	52.5
2.1	Uso de conocimientos	42.1	44.2	64.5	67.9
2.2	Uso de procedimientos de rutina	25.5	28.4	51.	55.5
2.3	Solución de problemas	12.8	17.8	37.0	44.0
2.5	Comunicación	4.5	5.6	25.1	32.4

Tabla No 2. Resultados de las pruebas TIMSS[3]

[2] Tomado de MEN (1997) Análisis y Resultados de las Pruebas de Matemáticas para Colombia, P.P. 120.
[3] Ibidem.

En cuanto al uso de conocimientos, se estudiaron formas de representación, de equivalencias, recuerdo de objetos matemáticos y sus propiedades; con relación al uso de procedimientos de rutina, se analizó el uso de equipos (instrumentos de medición y calculadoras), los procesos de calcular, graficar, transformar, y medir; en el aspecto de solución de problemas, se consideró el planteamiento, la clarificación y solución de problemas, las diferentes estrategias de solución, los procesos de predicción y verificación de resultados; para el caso de la comunicación, se tuvo en cuenta el uso de vocabulario y la notación, las representaciones relacionadas y los procesos de describir, discutir y criticar la información recibida y procesada.

Con base en los resultados presentados en las anteriores tablas, de los resultados de las pruebas TIMSS, se puede concluir que: "La mayoría de las preguntas de medición son muy difíciles para los estudiantes colombianos. Más del 75% de ellos se revela no preparado para resolver el 52% de las preguntas del área. Para los estudiantes internacionales esta situación sólo se presenta en un porcentaje muy pequeño" (p.121).

1.2. Pruebas SABER

Desde el año 1991 el ICFES inició una etapa de trabajo en el campo evaluativo de la Educación Básica, uno de cuyos resultados fue la aplicación de las ya conocidas pruebas SABER; su propósito ha sido, y sigue siendo, el de obtener, procesar, interpretar y divulgar información confiable, y permitir un análisis pertinente sobre la educación en el país, de tal manera que se han constituido en una base sólida para la toma de decisiones en las diferentes instancias del servicio educativo.

Las pruebas SABER, aplicadas a un grupo representativo de estudiantes de todo el país en los años 1991, 1992, 1997 y 1998, permitieron recopilar información sobre los logros de los estudiantes de los grados 3º, 5º, 7º, y 9º de la Educación Básica en el Área de Matemáticas, en relación con el uso que los estudiantes hacen de las Matemáticas en la comprensión, aplicación, utilización y comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos.

En el marco del Proyecto *"Mejoramiento de la Calidad de la Educación Básica de Antioquia"*, el ICFES, por requerimiento de la Secretaría de Educación y Cultura de Antioquia, ha desarrollado pruebas de logro (instrumentos y marcos teóricos), para diagnosticar y hacer seguimiento del estado de la Educación Básica en Matemáticas en el departamento. En el desarrollo de este proyecto se han realizado aplicaciones en los grados Tercero, Quinto, séptimo y noveno. La primera aplicación se llevó a cabo en noviembre de 1998, en los grados séptimo y noveno, con una cobertura de 23 municipios. La segunda aplicación se realizó en octubre de 1999, en los grados Tercero y Quinto, con una cobertura de 52 municipios. En noviembre del 2000, se realizo la tercera aplicación en los grados Tercero, Quinto, séptimo, y noveno, con una cobertura de 63 municipios. Con estas aplicaciones quedó así, definido lo que en el proyecto se conoce como la *línea de base.*

A partir de la formulación y resolución de problemas, las pruebas hicieron una aproximación al estado del pensamiento matemático de los estudiantes, y por ende, al establecimiento del estado de la calidad de la educación Matemática. Uno de los indicadores utilizados para tal fin, son las competencias, vistas como manifestación del saber/hacer del estudiante en dicho contexto. Este saber/hacer implica que el estudiante ponga en juego tres aspectos que están integrados y configuran la competencia como tal; y .se refieren *al conocimiento matemático, a la comunicación y a las situaciones problema*.

El conocimiento matemático*:* Para establecer desde dónde y cómo se ve el conocimiento matemático escolar, se partió de una concepción en la cual se reconocen dos aspectos: el conceptual y el procedimental. *El conocimiento conceptual* se refiere a una serie de informaciones conectadas entre sí mediante múltiples relaciones, que constituyen lo que se denomina estructura conceptual. *El conocimiento procedimental* se refiere a la forma de actuación o de ejecución de tareas Matemáticas que van más allá de la ejecución mecánica de algoritmos.

La comunicación: Se refiere a la habilidad del estudiante para leer y escribir Matemáticamente; implica que pueda interpretar, traducir y simbolizar desde y hacia un lenguaje matemático.

Al enfrentarse a una ***situación problema***, el estudiante debe matematizarla, modelándola a partir de las diferentes relaciones que establezca entre los conceptos que le subyacen.

Bajo el contexto de la solución de problemas se evaluaron: para los grados Tercero y Quinto aspectos relacionados con aritmética, probabilidad y estadística, geometría y medición. Para los grados séptimo y noveno, se evaluó aritmética, probabilidad y estadística, álgebra, geometría y medición.

Para los grados Tercero, Quinto y séptimo, en lo relacionado con geometría y medición: se enfatizó en el uso de la medida y en el reconocimiento de formas geométricas básicas, caracterizadas a través de sus elementos y propiedades. Así, se evaluaron aspectos como: reconocimiento de figuras geométricas, nociones de perímetro y área en figuras planas, seguimiento de patrones, mediciones con unidad patrón (convencional y no convencional). También se exploraron las propiedades y características de cuerpos, superficies y líneas; así como algunos movimientos en el plano. En el caso de la medición, se enfatizó en el uso de diversas magnitudes en la solución de situaciones. También aspectos como: noción de perímetro y de área por recubrimiento, identificación de figuras geométricas a través de sus propiedades, rectas, posiciones relativas (perpendicularidad, paralelismo), propiedades de las figuras, transformaciones (rotaciones y traslaciones).

Las nociones tratadas en los grados anteriores se van formalizando cada vez más, utilizando argumentos matemáticos para describir figuras geométricas, identificar y reconocer propiedades y relaciones. En el caso de la medición, se enfatizó en el uso de diferentes sistemas de medida, reconociendo sus unidades y patrones, en situaciones cotidianas y Matemáticas; conceptualización de perímetro y de área, relaciones y propiedades geométricas, propiedades y clasificación de figuras planas y sólidos, además de movimientos en el plano.

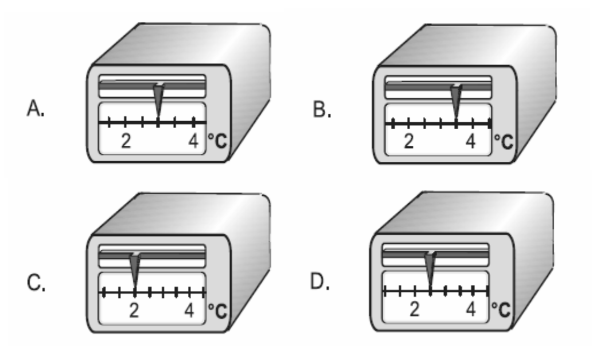
Para el grado Noveno, se enfatizó el uso de teoremas, relaciones y propiedades, como insumos necesarios para la resolución de diferentes situaciones. Se evaluaron aspectos como: conceptualización de diversas magnitudes (longitud, superficie, capacidad, peso, amplitud angular), relaciones y propiedades de objetos geométricos, conceptualización de la longitud de la circunferencia y área del círculo, movimientos en el plano, utilización de patrones de medida.

Con respecto a los 124 municipios del departamento de Antioquia que presentaron las pruebas, se señala lo siguiente: Para el grado Quinto, 27 municipios requieren desarrollar un mayor trabajo que permita la exploración de características de cuerpos, superficies y líneas, movimientos en el plano, ***uso de diversas magnitudes, nociones de área y perímetro***, entre otros. Para el grado séptimo, 41 municipios requieren desarrollar trabajos que enfaticen en el reconocimiento de atributos de figuras geométricas, el ***uso de diferentes sistemas de medida*** y movimientos en el plano. Para el grado noveno, 42 municipios necesitan enfatizar su trabajo en el ***análisis de teoremas, conceptualizaciones de diversas magnitudes (longitud, superficie, capacidad, peso…)*** y en relaciones y propiedades de objetos geométricos.

Los resultados de las pruebas aplicadas en el año 2002 reflejan conceptualizaciones y aplicaciones erróneas en los aspectos relativos a las magnitudes y a su tratamiento métrico. Se puede observar que los estudiantes, presentaban dificultades en la interpretación de escalas y tomaban decisiones ante una pregunta con base en una primera percepción de las figuras, centrándose en el conteo de las marcas sobre una línea numerada.

Se ilustra con un ejemplo tomado de MEN-ICFES (2003a), en la pregunta 12, nivel c, grado Tercero, prueba de Matemáticas:

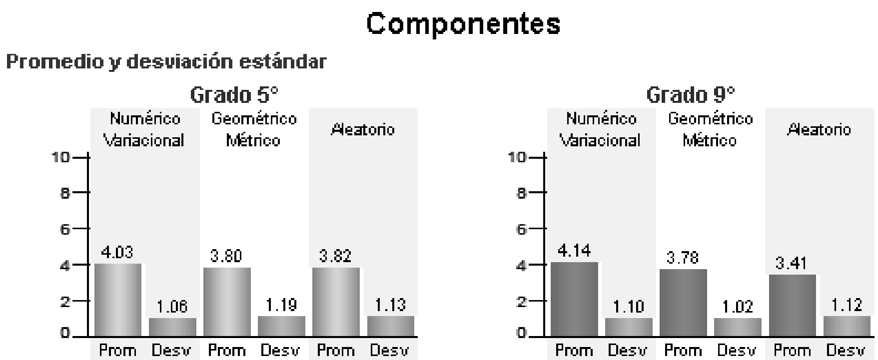
> *Un tendero necesita poner su nevera a una temperatura de 3ºC para conservar sus jugos. La nevera que registra esta temperatura en ºC es:*



> *La opción A fue seleccionada por aproximadamente el 44%, la B por el 17%, la C por el 24% y la D por el 14%; es decir, cerca del 56% seleccionó la opción equivocada. Esto puede obedecer a varias razones: por una parte, podría ser una manifestación sobre dificultades con la interpretación de escalas o de una decisión tomada sólo con base en una primera percepción de las figuras, centrada en el conteo de las marcas sobre la línea numerada (opción B y D); o, posiblemente, frente a la no presencia del símbolo numérico 3, optó por una de los símbolos presentes en las figuras dadas, inmediatamente anterior a 3 y aparece señalado (opción C). Por otra*

parte, permite cuestionarse sobre la responsabilidad de la escuela en la formación de ciudadanos capaces de interpretar información y utilizar instrumentos de medida de uso frecuente en el contexto social (p. 41).

En el año 2005 se aplicaron las últimas pruebas SABER en donde fueron evaluadas varias áreas, entre ellas Matemáticas y cuyos resultados. nacionales se presentan en el siguiente gráfico para los grados Quinto y Noveno



Éstos muestran que sobre una escala de 10 lo estudiantes no alcanzan puntajes por encima del 40 %, lo que indica el bajo desempeño en relación con los componentes evaluados y especialmente el geométrico y el métrico. En donde la evaluación se centró en evaluar aspectos que

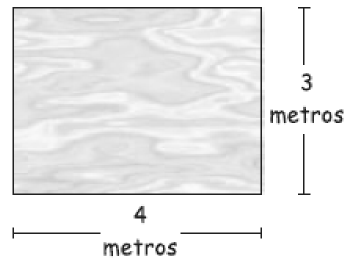
> "involucran la construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones o representaciones materiales, Mas específicamente está ligado a la comprensión del espacio, al desarrollo del pensamiento visual, al análisis abstracto de figuras y formas en el plano y en el espacio a través de la observación de patrones y regularidades. Involucra el razonamiento geométrico, **la solución de problemas significativos de medición, modelación, diseño y construcción**.
>
> **Relacionado además con la construcción de conceptos de cada magnitud (longitud, área, volumen, capacidad, masa), la comprensión de los procesos de conservación, la estimación de magnitudes, la apreciación del rango, la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos. El uso de unidades, la selección y uso de instrumentos, la comprensión de conceptos de perímetro, área, superficie del área, volumen."** ('ICFES , p. 6)

A continuación se muestran algunas de las preguntas realizadas en el componente de pensamiento métrico:

En la orilla de la laguna, Diana observa el siguiente letrero. La unidad que debe estar escrita en el letrero es

A. m^3 B. m
C. m^2 D. c.m

En la granja hay un estanque para criar peces. La superficie de este estanque es de forma rectangular y sus lados miden 3 y 4 metros, como lo muestra el dibujo.

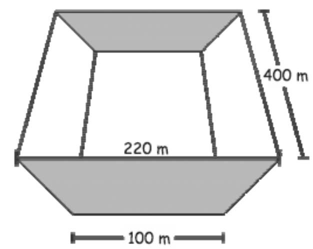


El área que ocupa el estanque es

A. 7 metros cuadrados.
B. 10 metros cuadrados.
C. 12 metros cuadrados.
D. 14 metros cuadrados.

Si la capacidad del embalse en litros es de 512 X 10^7, la cantidad de metros cúbicos de agua que caben en el embalse es

¿Se trata de calcular la capacidad de esta piscina trapezoidal?



A. 512 X 10^4 B. 512 X 10^5
C. 512 X 10^7 D. 512 X 10^{10}

Tanto en los resultados de las pruebas TIMSS como en los de las pruebas SABER, se puede identificar que uno de los ejes que han sido problemáticos, evidenciados a lo largo de casi 10 años, en la Educación Básica colombiana lo constituyen los conceptos relacionados con las magnitudes y sus medidas y, por tanto, merece una mirada a todos los procesos que involucra y a la forma como son presentados en la escuela.

Unidad No.2

Propuesta del M.E.N

2.1 Desde los lineamientos curriculares

El texto de Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), del Área de Matemáticas, es una propuesta del Ministerio de Educación Nacional que señala algunos criterios para orientar el Currículo y sugiere los enfoques que debería tener la enseñanza de las Matemáticas en el país, con el fin de que se estudie la fundamentación pedagógica de dicha área y se intercambien experiencias en el contexto de los Proyectos Educativos Institucionales.

Los Lineamientos organizan el Currículo del quehacer matemático en tres grandes aspectos: procesos generales, conocimientos básicos y contextos. Los procesos generales tienen que ver con el aprendizaje; es decir, el razonamiento, el planteamiento y la resolución de problemas, la comunicación, la modelación, la elaboración, la comparación y la ejercitación de procedimientos. Los conocimientos básicos se relacionan con los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático, y con los sistemas propios de las Matemáticas: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Los contextos hacen alusión a los ambientes que rodean al estudiante y le dan sentido a las Matemáticas que aprende, a través de las situaciones problemáticas, de las mismas Matemáticas, de la vida diaria y de las otras ciencias.

El pensamiento métrico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes, su cuantificación y su uso con sentido y significado para la comprensión de situaciones en contextos. Esto hace que el concepto potente para el desarrollo del pensamiento métrico sea el de magnitud, haciendo énfasis en los siguientes aspectos:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medida.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición.

2.1.1. La construcción de los conceptos de cada magnitud

Las cualidades de los objetos y fenómenos susceptibles de ser medidas no están puestas en ellos; existe un trabajo humano previo y se requiere de una actividad creadora del cerebro para abstraerlas. Los niños requieren tiempo para construir los conceptos relativos a las magnitudes, porque inicialmente perciben la magnitud concreta por ejemplo el ancho, el alto y el largo; luego las funden en una sola para construir la magnitud abstracta: longitud.

Estos procesos de abstracción son importantes para la construcción de las diferentes magnitudes en toda la Educación Básica, y se logran a través de diversas situaciones de cuantificación y comparación.

2.1.2. La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes

Para consolidar los conceptos de longitud, área, tiempo, peso, volumen, etc., es necesaria la percepción de lo que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio. En el proceso de adquisición de los procesos de conservación de magnitudes, se debe tener cuidado con las actividades motoras que pueden distraer al niño del concepto y de su estructura subyacente. La conservación de longitudes aparece entre los seis y los ocho años de edad. Para las demás magnitudes, va apareciendo gradualmente con el concepto mismo de cada una.

2.1.3. La estimación de magnitudes y el proceso de capturar lo continuo con lo discreto

Estos procesos están relacionados con los procesos de la medición, tanto el recuento para las variables discretas, como el proceso de medida donde las propias unidades sean indistinguibles unas de otras.

La estimación es el proceso por medio del cual se llega a establecer una cantidad de magnitud sin la mediación directa de un instrumento de medida. En algunos casos con el objeto y el instrumento presentes, en otros casos con alguno o los dos ausentes. La estimación se relaciona con la capacidad que tenga una persona para expresar una cantidad de magnitud sin ver el objeto y/o sin comparar directamente las unidades con el objeto a “medir”. Así se permite visualizar el carácter aproximativo de la medida y su naturaleza continua.

2.1.4. La apreciación del rango de las magnitudes

Aquí se contemplan tareas como la capacidad de analizar situaciones, determinar la(s) magnitud(es) que intervienen y el tipo de unidades más apropiadas para realizar la medición de las mismas. Antes de seleccionar una unidad o un patrón de medida, es necesario hacer una estimación perceptual del rango en que se halla una magnitud concreta; lo cual depende de la familiaridad que se tenga con las unidades de medida y con las magnitudes.

Se habla de rango en un sentido más amplio que el de orden de magnitud; en el primer caso se hace referencia a las unidades apropiadas para medir ciertas magnitudes, y en el segundo caso se puede estar hablando del mismo rango pero de distinto orden, por ejemplo, la longitud de dos carreteras, rango en el que son útiles los kilómetros, pero en distinto orden de magnitud, la una puede estar en el orden de las centenas y la otra en el orden de los miles de kilómetros.

2.1.5. El trasfondo social de la medición

Está relacionado con la interacción social y la referencia a un trasfondo significativo e importante que debe estar presente para el estudiante en el momento de la construcción de los conceptos y los procesos de la medición. Se constituye, por lo tanto, en un aspecto de mucha importancia para los procesos de estimación y apreciación del rango de las magnitudes, como también de la asignación numérica, la cual puede darse en unas etapas según el nivel de observación que se tenga y lo que se conozca de la magnitud dada.

El proceso de asignación numérica depende de la selección de las unidades, de la medición y de todo el trasfondo social en el que ocurre.

2.2. Desde los estándares básicos de matemáticas

En los dos últimos años en el país se han venido discutiendo los "Estándares para el Área de Matemáticas", pretendiendo con ello unificar criterios en torno a los conceptos, procesos y contextos que deben orientar cada uno de los ejes temáticos que conforman el Currículo del Área de Matemáticas, según el MEN (2003), éstos

> *Son criterios claros y públicos que permiten conocer qué es lo que deben aprender los estudiantes. Son el punto de referencia de lo que un alumno puede estar en capacidad de saber y saber hacer, en determinada área y en determinado nivel. Son guía referencial para que todos los colegios…ofrezcan la misma calidad de educación a todos los estudiantes colombianos (p.5).*

Los Estándares están definidos sobre la base de tres ejes, el conceptual, el procedimental[4] y el contextual. El eje conceptual de los Estándares está constituido por lo que los Lineamientos Curriculares denominan los conocimientos básicos; El eje procedimental lo constituyen los procesos básicos de la Matemática escolar, como la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación, la comparación y ejercitación de procedimientos, MEN (1998, p.74). En cuanto a lo contextual, se parte de los contextos individuales de quien aprende los conceptos y del contexto propio del saber específico al cual pertenecen.

En cuanto al pensamiento métrico, dos ejes conceptuales articulan toda la propuesta del MEN (2003): Las magnitudes y los sistemas de medición. que permiten, en primer lugar

[4] *El conocimiento procedimental* se refiere a la forma de actuación o de ejecución de tareas Matemáticas que van más allá de la ejecución mecánica de algoritmos. Tomado del análisis Pruebas Saber ICFES 2001.

orientar el desarrollo del pensamiento métrico y, en segundo lugar, transversalizar todos los demás pensamientos.

Con respecto a lo primero, para las magnitudes y sus medidas se propone, en los primeros grados de la Educación Básica, Estándares como:

> *Reconocer y diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos…comparar y ordenar objetos…reconocer el uso de las magnitudes y de las dimensiones de las unidades.*

Para los procesos de medición se plantea Estándares como:

> *Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos Estandarizados… seleccionar unidades para la medición… utilizar técnicas y herramientas para la medición… relacionar unidades para la medición de diferentes magnitudes.*

De otro lado, identifica unos procesos asociados al cálculo con unidades de medida, a la estimación de medidas y a la resolución de problemas asociados con la medición de áreas, perímetros y volúmenes, entre otros, usando unidades convencionales o ESTTÁNDARizadas. Además de la selección de unidades apropiadas y la utilización de instrumentos de medida en situaciones problemáticas.

Con respecto al segundo eje (Transversalizar los demás pensamientos), la lectura de los Estándares (en forma horizontal), permite reconocer algunos nexos entre Estándares de los diferentes pensamientos en el mismo grado. Por ejemplo, al plantear otros ejes temáticos aparecen Estándares asociados a situaciones de medición o al uso de magnitudes:

- **En el pensamiento numérico:**
  "Describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes".
  "Utilizar números (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida".

- **En el pensamiento variacional:**
  "Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias".

2.3. Tratamiento de la medida en los textos escolares

Desde una mirada .a los textos, como uno de los referentes del Currículo desarrollado en el aula de clase y a manera de crítica con respecto a los conceptos fundamentales del pensamiento métrico se destaca lo siguiente:

- Con respecto al concepto de las magnitud: .no hay un tratamiento previo de la cualidad como tal que permita percibirla; esto es, aislarla y distinguirla de las demás cualidades propias del objeto. situación que desde la perspectiva del adulto, para el niño es obvia y no parece esencial.

- Con respecto a uso de las unidades: . tienen un papel poco significativo en los procesos desarrollados, y sólo se utilizan para hacer los cálculos de conversión, olvidando el papel de la unidad como un tercer agente, intermediario, que permite comparar y cuantificar las magnitudes. Se desconoce que la unidad de medida y su representación patrón. son cosas diferentes y sólo se hace uso de unidades ESTTÁNDARizadas.
- Con respecto a las actividades de medida: .están ausentes, quizás como consecuencia del poco uso que se hace de las unidades de medida. Bajo esta perspectiva se priva a los alumnos de la actividad de medir, al dárseles en los ejercicios y problemas, las medidas con su asignación numérica; lo cual los aleja de otras posibilidades relacionadas con el uso de instrumentos de medida.
- Dado que la estimación, implica un dominio .más abstracto de los conceptos "unidad de medida" y "asignación numérica", no se hacen actividades relacionadas con ella y se desconoce su papel en la resolución de problemas.

Por último, como afirman Olmo Romero, Moreno Carretero y Gil Cuadra (1993), con respecto a la enseñanza del área y del volumen:

> *Debe realizarse un estudio integral de la cualidad y de su medida, que permita aislarla, comparar objetos respecto de ella, plantear la necesidad de una unidad de medida, conocer y usar las diferentes unidades, estimar la medida del volumen de un objeto, y finalmente, aplicar todos éstos conocimientos a situaciones problemáticas de la vida cotidiana. Ha sido frecuente encontrar textos en los que tras una muy breve introducción sobre la cualidad han estudiado las unidades de medida, olvidándose de los demás aspectos, lo que en nuestra opinión es un tratamiento empobrecido e incompleto que sólo puede conducir a un aprendizaje memorístico y nada útil. (p. 113).*

Unidad No.3

Contexto Histórico-Epistemológico

Se hace necesario dar una mirada a la historia de las Matemáticas para identificar allí las concepciones y contextos que permitieron la construcción de conceptos matemáticos, o que por el contrario impidieron su desarrollo, convirtiéndose en obstáculos epistemológicos. Según Brousseau (1993):

> *Un obstáculo epistemológico está constituido por aquellos conocimientos que deben su solidez al hecho de funcionar bien bajo ciertos dominios de la actividad, pero que se muestran insuficientes y conducen a contradicciones cuando se los aplica con otros contextos.*

De allí que se vuelva importante en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, identificar conocimientos que funcionan bajo ciertas condiciones, y parecieran suficientes para explicar los fenómenos a ellos asociados, pero que cuando son transferidos a otros contextos no funcionan o conducen a contradicciones y no obedecen sólo a la complejidad del concepto, como agrega al respecto Bachellard (1993):

> *No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos (p15).*

Bajo esta perspectiva, se da una mirada al desarrollo histórico del concepto de magnitud y de la medición, para identificar rupturas, avances y retrocesos; no sólo con respecto al concepto de magnitud, sino con relación a otros conceptos como los de espacio y número. Para ello, se hace énfasis en dos momentos de la historia: el primer momento lo ocupa la historia de la antigua Grecia, Babilonia y Egipto. El segundo momento, y en relación con las medidas, lo constituye el período comprendido entre 1790 – y 1840 en Francia, en donde se impone el Sistema Métrico Decimal.

Se tomará, en primer lugar, como eje central, el desarrollo de la Matemática griega; porque, además de recoger los elementos de la Matemática babilónica y egipcia, aportó significativamente a la construcción de la teoría moderna de las Matemáticas del siglo XV en adelante.

Los griegos (siglos VII a III a.c.), fueron conocedores de las Matemáticas egipcias y babilónicas, por sus prácticas comerciales y por el uso dado en las construcciones; pero llevados quizás por la idea de considerar que el conocimiento práctico no tenía el carácter científico, no dejaron grandes evidencias escritas de éste. Sin embargo, su mayor contribución está en la construcción teórica de muy buena parte de la Matemática. Uno de estos ejemplos está en la teoría de las magnitudes, la cual les permitió profundizar en muchos otros temas de las Matemáticas y de las ciencias; a la vez que superar serios problemas originados quizás por el descubrimiento de los inconmensurables, además de la imposibilidad para aceptar el infinito actual. Y tal vez como consecuencia de la dicotomía continuo-discreto,

> *En la concepción pitagórica, la línea se compone de un número entero de unidades. Muy pronto, sin embargo, descubrieron que no importa cuán pequeña sea escogida una unidad para medir el lado de un cuadrado, la diagonal no puede expresarse como un agregado de las mismas unidades que componen el lado.*
>
> *Quedaba claro que es imposible encontrar un segmento tan pequeño que podamos tomarlo como unidad, de modo que el lado del cuadrado y la diagonal del mismo puedan expresarse ambos como múltiplos finitos de aquella. Este descubrimiento puso en entredicho la identificación establecida por los pitagóricos entre el reino de lo discreto, que es el número y el reino de la magnitud continua, que es la geometría (p.28).*

Esta dicotomía estuvo presente a lo largo de la historia de las Matemáticas, y sólo fue superada hacia finales del siglo XV con los trabajos de Simón Stevin.

Una de las preocupaciones del pensamiento griego de la época fue tratar de encontrar los universales o fundamentos constitutivos de todas las cosas, su naturaleza última ($\alpha\rho\gamma\eta$), y en esta búsqueda varias escuelas sentaron su posición. Una de las escuelas que más influyó en el desarrollo del pensamiento matemático griego fue la escuela pitagórica (500 a. c.), cuyo lema era: "todo es número". Afirma De la Torre (2003) que los números, para los pitagóricos, son los componentes últimos de todas las cosas materiales y la naturaleza misma:

Sin embargo el intento por unificar el reino de las magnitudes continuas y el reino de los números discretos permaneció a lo largo de la historia griega en la escuela del atomismo matemático creada por Leucipo y Demócrito "como una secuela de su doctrina materialista del atomismo físico" (De la Torre. 2003. P.28), según la cual todas las cosas están constituidas por partículas invisibles e indivisibles que por un continuo movimiento de agregados y disgregados dan origen a todas las cosas.

Boyer (1949), al referirse al concepto de número de los pitagóricos afirma que:

> *Por el término número los Pitagóricos no entendieron la abstracción a la cual nosotros damos este nombre; con él designaron una progresión de múltiples que comienza con la unidad y una regresión que termina en ella. Los enteros positivos fueron para ellos los números fundamentalmente (p.20).*

Es decir, que un número era discreto, la unidad era indivisible y constituía la esencia del universo. La ausencia de argumentos a favor de un continuo numérico obligó a los matemáticos griegos a pensar un continuo físico, sugerido por las magnitudes geométricas; siendo Eudoxo quien introduce la idea de magnitud continua; no se trataba de un número, sino de entidades geométricas (longitud, área, volumen, etc), las cuales eran continuas, contrariamente a los números, que eran discretos.

Otro de los aportes de los griegos, fue la definición nueva y universalmente aceptada de la igualdad de dos razones, dada por Eudoxo. Gracias al uso previo que habían dado los griegos al concepto de proporción, se consolidará en un extenso proceso la teoría de las magnitudes. Ellos tenían la idea de que cuatro cantidades están en proporción $c{:}d = a{:}b$ si las dos razones $a{:}b$ y $c{:}d$ tienen la misma resta mutuamente; es decir, la menor en cada una de las razones cabe en la mayor el mismo número entero de veces. El resto en cada caso cabe en la menor el mismo número entero de veces y el nuevo resto cabe en el anterior, el mismo número entero de veces y así sucesivamente (sustracciones sucesivas). Esta definición se hace casi imposible de utilizar, ya que implica, en la mayoría de las veces, procesos indefinidos; sin embargo el sentido de razón presentado en el libro V de los Elementos de Euclídes, calificado por Boyer (1994, p.127) como "un éxito brillante", clarifica lo que debe entenderse por magnitudes del mismo tipo; un segmento, por ejemplo no puede compararse en términos de razón con un área, y un área no puede compararse con un volumen. La proposición 4 del libro V, tomada de Heath (1993) dice:

> *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente (p.142).*

Este tratamiento teórico de las magnitudes y de sus medidas permitió un refinamiento de la teoría de las proporciones, en primer lugar, y de las razones, en segundo lugar. Además permitió superar la crisis generada por el descubrimiento de los irracionales, dejando las bases para la teoría moderna de los números reales, como afirma De la Torre (1993):

> *La noción de cortadura de Dedekind tiene su fuente en la definición del libro V de los elementos. En caso de que existan enteros* ***m*** *y* ***n*** *para los cuales se tengan igualdades $mc=nd$ y $ma=mb$, entonces $c{:}d = a{:}b$, razón que es expresable de manera precisa mediante el número racional $\frac{m}{n}$. En esta situación las magnitudes a y b son conmensurables, así como las magnitudes c y d. Puede suceder sin embargo que no existen enteros m y n que satisfagan la igualdad. En tal caso, las magnitudes a y b son inconmensurables y su razón no es expresable con tal precisión mediante ningún número racional (p. 61).*

Dice el profesor Alberto Campos (1994), al exponer la *teoría de los reales* según Bourbaki (1969, p. 375) que:

> *Se puede identificar el conjunto de las razones de enteros con una parte del conjunto de las razones de magnitudes, es a saber, con el conjunto de las razones racionales (razones de magnitudes conmensurables); sin embargo, por el hecho de que estas razones, en tanto que operadores sobre los naturales, son (en general) definidos solamente sobre una parte del conjunto de los naturales, era necesario desarrollar la teoría separadamente (libro VII de Euclides).*
>
> *El dominio de operadores construido de esta manera era entonces para los matemáticos griegos el equivalente de lo que es para nosotros el conjunto de los números reales; por otra*

> *parte, es claro que con la adición de magnitudes y la multiplicación de razones de magnitudes, poseían el equivalente de lo que es para nosotros el cuerpo de los números reales, aunque de una forma mucho menos manejable (p, 127).*

La dificultad para entender lo continuo (magnitud) – discreto (número), se mantuvo hasta finales del siglo XV, cuando los trabajos de Simon Stevin, (1548 – 1620) acerca del concepto de número, facilitan algunas aclaraciones sobre las contrariedades surgidas con los griegos por conceptos como número, unidad aritmética y unidad geométrica.

Según Kline (1992, p.191), Stevin parte de dos definiciones: "La aritmética es la ciencia de los números" y "número es todo aquello con lo que se revela la cantidad de una cosa: la unidad es un número". Y luego argumenta que la parte es del mismo material del todo, la unidad es una parte de una multitud de unidades, consecuentemente, la parte es del mismo material que la multitud de unidades, pero el material de una multitud de unidades es número; por lo tanto el material de la unidad y la misma unidad es número. La premisa decisiva es aquella en la cual el material de una multitud de unidades es número. Stevin acepta la definición clásica de número como una "multitud consistente de unidades", pero él entiende esta determinación conceptual por sí misma como el "material" de la cosa a ser definida, en el mismo sentido en el que se habla del material (materia) del agua o del pan.

Otro gran momento para el proceso de consolidación, (no de las magnitudes y sus medidas en el contexto de la Matemática como tal, sino del establecimiento de las magnitudes y sus medidas ámbito social; pero que encierra parte de la problemática de entender la medida y su relación con el número), se enmarca en el período comprendido entre los años de 1790 y 1840 en Francia. En este período, los terratenientes tienen el derecho de imponer su propia medida, bajo unas reglas poco claras y un tanto arbitrarias; se tenían así, dos medidas: una para comprar y otra para vender, una para cobrar la renta y otra para pagarla, dice Kula (1980):

> *El Parlamento de París en 1710, decide que la renta de las tierras debe seguir siendo pagada en la medida por la que fue creada, y por tal motivo debe haber dos medidas, una para el deudor y otra para el acreedor (p.303).*

Páginas atrás lo describe con más detalle:

> *De los albores de la revolución francesa nos llega una descripción del despavorido Young. A. (Voyages en France, en 1787)…la interminable complicación de las medidas francesas sobrepasa cualquier imaginación. Se diferencian no sólo de provincia en provincia, sino de cantón en cantón y así de ciudad en ciudad: estas diferencias, que llevan a la desesperación, se manifiestan tanto en la nomenclatura como en los tamaños; tanto en la superficie como en el volumen. A ello se añade la general ignorancia de los campesinos"… (p 89).*

Con el clamor de la revolución francesa de 1789, se escuchan voces que piden "que no haya más que una sola ley, una sola medida y una sola pesa", las cuales sólo encontraron eco en el decreto imperial de 1812 que impuso como obligatorio para toda Francia el Sistema Métrico Decimal, el cual nadie se atrevía a cuestionar; pues era el fruto de la labor de los academicistas, pero que nadie entendía; aumentando el caos ya descrito, pues las antiguas medidas eran mantenidas como recurso ante la incomprensión de las nuevas.

Agrega Kula (1980):

> *... por tanto, se trató de ilustrar a los ciudadanos pobres por todos los medios posibles. En los lugares más populosos de París el metro estaba expuesto públicamente a fin de solucionar las discrepancias. Las escuelas debían enseñar el sistema métrico (nota de Carcasota, del 11 de sept. De 1792). Se fomentaba la redacción de manuales sobre el tema que eran luego revisados. En París y en otras ciudades se organizaban cursos públicos de enseñanza del sistema métrico*
>
> *Sin embargo, al parecer no eran grandes los resultados de tal enseñanza, ya que ésta no era fácil. La mayor dificultad estribaba en el sistema decimal y en la nomenclatura.*
>
> *Tal vez nos extrañe en primer término la dificultad presentada por el sistema decimal; sin embargo, no debiera ser así. Ese sistema tantas veces elogiado y glorificado, inclusive por los creadores de la reforma, no es tan sencillo en su manejo como nos podría parecer; y principalmente para la gente que, aunque sabe a la perfección dividir por dos y el resultado nuevamente por dos o multiplicar por dos y nuevamente por dos, se halla en la imposibilidad de aprender las fracciones decimales y el manejo de la coma (P.409).*
>
> *La nomenclatura no sólo era difícil para la población por romper con las viejas tradiciones o por ser muy nueva. Era engorrosa por estar compuesta de elementos ajenos al idioma francés y susceptible de provocar equívocos. La pequeña diferencia fonética entre deci y deca significaba diferencias de magnitudes nada pequeñas. Los prefijos centi, hecto, Kilo, se enredaban en las mentes humanas. Los creadores del sistema estaban inmensamente orgullosos de estas denominaciones (comisión de medidas y pesas creada en 1794.), llamadas metódicas. El método no se identificaba con la sencillez. Los sistemas tradicionales de medición solían ser funcionales. Significaban una cierta realidad social, relacionada con el hombre, con su trabajo y con los frutos de ese trabajo. (p. 410).*

Dos momentos diferentes y bajo dos conceptos diferentes con relación a las magnitudes y sus medidas dan cuenta de la dificultad natural del proceso para articular el reino de las magnitudes y sus medidas con lo numérico; es decir, el proceso de “capturar lo continuo con lo discreto” (MEN, 1998).

Unidad No.4

En un contexto teórico

Antes de plantear una estrategia metodológica que favorezca el desarrollo del pensamiento métrico en los estudiantes de la básica, es necesario revisar algunos elementos conceptuales para reconocer, no sólo la estructura Matemática sino también los aspectos cognitivos que están involucrados en su comprensión y desarrollo. Se revisan por lo tanto, los conceptos de magnitud, medida y sistemas de unidades de medidas.

4.1 Magnitud

Regularmente designamos como una magnitud a una cualidad o atributo de una serie de objetos que puede variar en forma cuantitativa y continua o en forma cuantitativa y discreta; en el primer caso, como más adelante se detallará, se habla de magnitudes continuas como son la longitud, el peso, el tiempo, etc. En el segundo caso, se habla de magnitudes discretas como son las colecciones de objetos o personas.

Algebraicamente se define la magnitud como un *semigrupo conmutativo y ordenado, formado por clases de equivalencia que son sus cantidades de magnitud.*

Así, que dado un conjunto M, no vacío, se constituye en una magnitud, si en él puede definirse una relación de equivalencia (=) y una operación (+), con las siguientes condiciones:

Para la relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $\forall\ a \in M \rightarrow a=a$
- Es simétrica: $\forall\ a,b, \in M \rightarrow a=b \Rightarrow b=a$
- Es transitiva: $\forall\ a,b,c \in M \rightarrow a=b \wedge b=c \Rightarrow a=c$

Para la operación interna (+): se definen las operaciones con respecto a la relación de equivalencia:

- Clausurativa : $\forall\ a,b, \in M \Rightarrow a+b \in M$
- Uniforme: $\forall a,b \in M \wedge \forall c,d \in M \rightarrow (a=b) \wedge (c=d) \Rightarrow (a+c = b+d)$

Nota: Esta propiedad da cuenta de la compatibilidad de la suma con respecto a la relación de equivalencia.

Propiedades de la operación:

- Asociativa: $\forall\ a,b,c \in M \rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$

- Conmutativa: $\forall\ a,b \in M \rightarrow a+b = b+a$
- Modulativa: $\exists 0 \in M \,/\, \forall\ a \in M \rightarrow a+0 = 0+a = a$

Si en el conjunto M se ha definido la relación de equivalencia y la operación (+) con las condiciones para cada una, decimos, que "los elementos de M definen una magnitud" (Luengo,1990, p.48) entendiendo ésta, por la cualidad común que hace que los elementos *a,b,c* de M sean igualables. Téngase en cuenta que los elementos de M no son los objetos en sí, sino clases de equivalencia de M. Quedando definida la magnitud (M,+) como un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

4.2. Cantidad de magnitud

Con el término "cantidad de magnitud" nos referimos a aquello que tienen en común los elementos iguales entre sí. Todos los objetos que tienen la misma cantidad de magnitud forman una clase de equivalencia.

Las cantidades de magnitud se pueden comparar entre sí, significa que en los elementos de M puede definirse una relación de orden; esto es, dados los elementos de M, al compararlos bajo la relación $\leq$, puede suceder que, sean iguales, mayores o menores, así $\forall\ a,b \in M \rightarrow a \leq b \vee b<a$, y con las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $\forall a, \in M \rightarrow a \leq a$
- Antisimétrica: $\forall a,b \in M \rightarrow (a\leq b \wedge b\leq a) \Rightarrow (a=b)$
- Transitiva: $\forall a,b,c \in M \rightarrow (a\leq b \wedge b\leq c) \Rightarrow (a\leq c)$

Quedan definidas las magnitudes, desde el punto de vista algebraico, como "un semigrupo conmutativo con elemento neutro totalmente ordenado".

También podemos definir una operación externa de "producto de cantidad de magnitud por un número real positivo" (.), así:

Sea $r,s,\in R^{+}$, $\forall e \in M \rightarrow \exists a \in M + r\cdot e = a$

Esta operación externa cumple:

$\forall r,s \in R^{+}$, $(r+s)\ a= r\cdot a + s\cdot a$ Es distributiva la suma de reales con respecto al producto por la cantidad de magnitud.

$\forall r,s \in R^{+}$, $r\cdot(a+b) = r\cdot a + r\cdot b$ También es distributivo el producto de real por la suma de cantidades de magnitud.

$\forall r,s \in R^{+}$, $r\cdot(s\cdot a) = (r\cdot s)\cdot a$, es decir, asociativa.

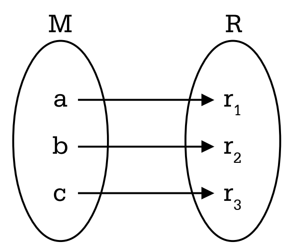
Ahora, como $a\leq b$ y $r\cdot a \leq r\cdot b$ muestra la compatibilidad del producto con el orden (<); de lo cual se desprende que el conjunto (M , + , <) con la operación producto de cantidad de magnitud por un número r es un semimódulo ordenado sobre el semianillo (R^{+}, +, **.**).

4.3. La medida de las magnitudes y la función medida

Con los conceptos anteriores y dado que $r,s, \in R^+$, $\forall e \in M \rightarrow \exists a \in M \,/\, r \cdot e = a$ se puede definir la "unidad de medida e" como ese elemento que pertenece a M, tal que multiplicado por el $r \in R^+$adecuado, puede expresar cualquier cantidad de magnitud, o de otra forma, "cualquier cantidad de magnitud puede ser expresada como el producto de un $r \in R^+$ por una cantidad fija llamada unidad de medida " (Luengo,1990, p.58).

Algebraicamente se dice que si dada una cantidad de magnitud "$a \in M$" cualquiera y definida una unidad "$e \in M$"; "r" es la medida de "a" con respecto a la unidad e y escribimos $m_e(a) =$ r.

La medida también se puede definir como una función de (M,+, <) en (R,+, *) tal que si "a,b,c … son los elementos de M y r_1, r_2, r_3 ... los elementos de R^+, y dado un e apropiado que pertenezca también a M (y puede ser igual a a,b,c), podemos asignar a cualquier elemento de M un $r \in R$, que definimos como la medida de a,b,c con respecto a e, $m_e(a)$



Esta función medida así definida asocia a cada elemento de M un único real "r" y cada "r" $\in R$ es la medida de un único ",a,b,c"…$\in$ M.
Además la función $m_e(c)$ cumple:

1. $m_e(a) \geq 0, \forall a \in M$
2. $m_e(e) = 1$
3. $m_e(a+b) = m_e(a) + m_e(b)$

O sea que la medida de la suma de cantidades de magnitud con respecto a la unidad "e" es igual a la suma de la medida de cada una de las cantidades de magnitud con respecto a la unidad "e".

4. Si multiplicamos una cantidad de medida "c" por un número "r" la medida queda multiplicada por ese número: $m_e(r \cdot c) = r \cdot m_e(c)$.

5. La función m_e a,b,c es compatible con la relación de orden ($\leq$).

Algunas consecuencias de estas propiedades de la función medida son:

- La posibilidad de determinar en las medidas múltiplos o divisores de ellas (propiedad 2).
- Ordenar cantidades de magnitud, ordenando los números que representan sus medidas (propiedad 3).

- Como (M,+, ≤) es isomorfo con (R, +,*), entonces podemos averiguar la suma de dos cantidades de magnitud sólo sumando los números.

Con estas consecuencias podemos, entonces, identificar nuevas propiedades en M:

- La divisibilidad: para cada "*a*" que pertenece a M, existe un *"b"* que pertenece a M, tal que es posible hallar un "*n*" que pertenece a *N*, y $a=n\cdot b$, que puede expresarse como $b+b+b\ldots$ con *n* sumandos. Luego, $a/n=b$, y a al ser dividido por *n* es igual a *b*. Por tanto, M admite la multiplicación y la división no sólo por *n*, sino también por números racionales.
- Postulado de Arquímedes: para toda *a,b* que pertenece a M, existe un *n*, número natural, tal que $n\cdot a<b$ o también, en forma simbólica: $\forall a,b,\in M, \exists n \in N / n\cdot a<b$

4.4. Tipos de magnitudes

Si bien, las magnitudes han sido definidas desde su estructura algebraica, éstas tienen un carácter mucho más intuitivo en las Matemáticas escolares; ya que es a partir de la manipulación de objetos como se pueden determinar aquellas cualidades o atributos medibles. Es por ello que la tipología de las magnitudes, sus medidas, unidades de medida y sus sistemas de medición se hace atendiendo más a ese carácter intuitivo, y desde el punto de vista físico, más que desde el punto de vista algebraico.

4.4.1. Magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas

Magnitudes fundamentales son aquellas que se definen por sí mismas en el proceso de medición; usando sus respectivas unidades de medida son también llamadas indefinidas o primarias. Se han definido en el Sistema Internacional (SI) cinco magnitudes fundamentales con su respectiva unidad básica de medida y el símbolo correspondiente.
Magnitudes fundamentales (S. I. Sistema Internacional, tabla7)

MAGNITUD	NOMBRE DE LA UNIDA BASICA	SIMBOLO
Longitud	Metro	M
Masa	Kilogramo	Kg
Tiempo	Segundo	S
Intensidad de corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	Mol
Intensidad luminosa	Candela	Cd

Tabla 7. Magnitudes fundamentales del S.I.

Las magnitudes que se definen a partir de otras (fundamentales), o que no son medibles directamente, se les denominan **derivadas**, como es el caso de la velocidad, que se define a partir de la longitud o distancia y el tiempo. En el sistema internacional se definen otras magnitudes denominadas complementarias, como son: el ángulo plano cuya unidad es el radián (rad.) y el ángulo sólido cuya unidad básica es el estereorradián (sr.).

4.4.2. Magnitudes escalares y magnitudes vectoriales

"Toda magnitud definida en un conjunto M se llama escalar si los elementos del conjunto pueden ordenarse linealmente" (Luengo, 29, p, 53), o como ya se dijo que una magnitud que tenga estructura de semimódulo ordenado, con un orden compatible con su ley de composición, sobre el semianillo, (R, $+$.), se denomina magnitud escalar. Si el semianillo es el de los números reales positivos, diremos que la **magnitud es escalar continua**; si el semianillo es el de los números naturales, diremos que es una **magnitud escalar discreta**. En forma intuitiva se denominan magnitudes escalares, aquellas cuyas cantidades de magnitud quedan completamente expresadas con un número y una unidad.

Al definir la operación "diferencia de magnitudes", $\forall\ a,b \in M, \exists d \in M/d = b\text{-}a \Leftrightarrow d+a=b$, se hace necesario distinguir las **magnitudes escalares absolutas** de las **magnitudes escalares relativas**. Esto es: si la operación diferencia sólo es posible cuando b>a decimos que d es una magnitud absoluta; pero si admitimos siempre la posibilidad de la diferencia, decimos que "d" es una magnitud relativa. En este caso se pueden identificar las cantidades opuestas, cuya suma es el elemento neutro.

Las magnitudes vectoriales son aquellas que además de ser definidas como una magnitud en los términos anteriormente descritos, requieren, además del número y su unidad, su dirección y sentido.

4.4.3. Magnitudes extensivas e intensivas

El carácter de magnitud extensiva o intensiva depende de si sus cantidades de magnitud se pueden sumar o no "con sentido"; es decir, dada una cantidad de magnitud ésta se puede agregar a otra cantidad de magnitud del mismo tipo obteniendo otra cantidad de magnitud del mismo tipo, equivalente a la suma de las dos primeras. O de otra forma, dada una cantidad de magnitud "c" ésta se puede descomponer en la suma de otras cantidades de magnitud del mismo tipo. De lo anterior se desprende que debemos identificar en principio dos clases de magnitudes: las intensivas que son aquellas magnitudes en las que no se puede definir la suma con el sentido usual, por ejemplo, si tomamos un vaso de agua a 30ºC y otro vaso de agua a 40ºC, al juntarlos no obtendremos dos vasos de agua a 70ºC. Esto indica que la suma de temperaturas no se puede hacer con sentido; sin embargo la temperatura es una magnitud; y las "magnitudes extensivas en las que sí es posible definir con sentido la suma" (Luengo, 1990, p. 52). Así dada una longitud "a" y otra "b" podré agregarlas y obtener una longitud "c", igual a la cantidad de "a" más la cantidad de "b".

Piaget define las magnitudes extensivas e intensivas en un contexto de relación parte – todo…Intensivo, donde sólo las partes pueden ser comparadas al todo que las engloba y lo extensivo, donde las partes pueden compararse directamente entre sí. (Piaget, 1971, p. 61).

4.5. Unidades y patrones de medida

Si a una clase de equivalencia cualquiera, "*e*", de M, se le asigna el real "1" mediante la función medida $M \rightarrow R$ definida anteriormente, ésta puede tomarse como unidad de medida (*e*), y cualquier elemento representativo de la clase se puede constituir en el patrón de medida.

Se pueden identificar unidades de medida convencionales y estandarizadas; las primeras hacen referencia a si éstas son aceptadas y reconocidas como tal por un grupo social o comunidad, y, a su vez, son no convencionales las que no son reconocidas y aceptadas. Las unidades estandarizadas son aquellas que son elaboradas de acuerdo con un modelo o patrón.

La medición estandarizada se desarrolló con fines prácticos, debido a las necesidades cotidianas del hombre en la construcción y el comercio, básicamente. En los primeros tiempos el cuerpo humano fue la medida lineal más utilizada, aunque fue posterior a la idea de medir longitudes según la duración de un día de viaje. Para las mediciones de la antigüedad todo el cuerpo servía como referencia directa: la longitud de un pie, el ancho de un dedo o de la mano, la longitud del antebrazo; esta última fue la más utilizada por los egipcios y los babilonios y correspondía a la longitud del antebrazo de un hombre desde el codo hasta la punta del dedo índice extendido. "Este tipo de concepción aceptada por la cual cuantificamos cualquier cosa física, se denomina **unidad**". (Hecht, 1999, p. 24).

Al darse cuenta los hombres de que los antebrazos eran diferentes, se dieron a la tarea de desarrollar unidades físicas invariables que sirvieran como referencia primaria o **patrón**; así. se creó el codo de granito negro como patrón para que se compararan y calibraran todas las varas de codo (en Egipto)

Sin embargo, los griegos y los romanos utilizaban más el pie; aunque su longitud también fuera muy variable. Un **passu** equivalía a cinco pies romanos y una **milla británica** a mil passus. Una **yarda** o **doble codo** se consideraba como la distancia desde la nariz hasta la punta del dedo índice extendido.

Una **pértica** se formaba colocando dieciséis pies izquierdos uno tras otro; y la pulgada resultó de la división del pie en doce partes iguales, cada una de las cuales era una **pulgada**. Esto debido a la gran utilización que los romanos hacían del número doce, por su facilidad para dividirlo en dos, tres, cuatro, seis.

En el Siglo XVI, cuando Europa Medieval cae en un letargo intelectual, se regresa a las medidas primitivas del cuerpo, y en 1790 la Asamblea Nacional en Francia, plantea la necesidad de un sistema estandarizado de unidades; así que la Academia de Ciencias adoptó un método decimal para las medidas, cuyas cantidades eran subdivididas en 1000, 100 o 10 partes iguales. Después de varios meses el estudio de la academia dio una nueva unidad de longitud, el metro, que inicialmente era la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. La primera **Conferencia General de Pesas y Medidas** (París 1889) igualó dicha longitud a la distancia entre dos trazos marcados sobre un prototipo de platino iridiado, que se conserva en Sévres. De 1960 a 1983, (17ª CGPM) se definió el metro a partir de una de las radiaciones emitidas por una lámpara de descarga llena del Isótopo 86 del kriptón. En 1983, se modificó la definición oficial del metro, gracias a la invención del láser y tomando como base la velocidad de la luz, el metro se define como la longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío, durante 1/299.792.458 segundos. (Incertidumbre 1 nanómetro).

Similarmente el concepto de peso, se intuyó desde que los humanos de la prehistoria luchaban para levantar y arrastrar sus cargas cotidianas. Este concepto estaba asociado al de volumen. La unidad babilónica de capacidad, o medida de líquidos era el **Ka,** el volumen de un cubo de un palmo de altura, cuando se llenaba de agua se convertía en una unidad de peso, la gran **mina,** sesenta **siclos** equivalían a una mina, 60 minas a un talento (palabras familiares en un sentido bíblico, Génesis 23,16 o Mateo 17,24). El sistema romano de pesas y medidas invadió a Europa, y su **libra** aún sobrevive con su abreviatura **lb**.

El gramo (originalmente unidad de peso) se especificaba como "el peso absoluto de un volumen de agua pura, a 0º C, equivalente a un cubo de un centímetro del lado". Gracias a la explicación de Newton sobre la diferencia entre peso y masa, el peso dejó de considerarse fundamental y en 1889, por acuerdo internacional, se redefinió el Kilogramo (1000 gramos) como la unidad de masa.

4.6. Sistemas de unidades de medida

Dice Gettys, (1991, p, 5): "un sistema de unidades incluye: (i) los patrones de medida, (ii) un método para formar unidades mayores y menores y (iii) las definiciones de las magnitudes derivadas.

Dado un conjunto de unidades de medida de una magnitud, estandarizadas o no, y si entre ellas se guarda una relación constante, entonces, constituyen un sistema de unidades de medida para esa magnitud. Si $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$ son unidades de medida y si entre ellas existe una relación α constante (1/2 o ser el doble de.., etc), entonces se constituyen en un sistema que , además, de posibilitar el cambio de unidades permite dar la medida de la cantidad de magnitud con mayor exactitud. Es decir, que si se tiene varias unidades de medida que guardan una relación α constante, y si se conoce la medida con una de ellas no es necesario efectuar nuevamente la medición con otra unidad; pues basta comparar sus valores numéricos para determinarla.

Este hecho es importante para el cambio de unidades o conversiones entre ellas:

$e_2 = \alpha e_1$ Entonces $\frac{e_2}{e_1} = \alpha$, también, $r_2 = \alpha r_1$, (siendo r_1 y r_2 los números que se asignan como sus medidas respectivamente), por tanto:

$$\frac{r_2}{r_1} = \alpha \quad , \quad \frac{e_2}{e_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

Así, cualquier unidad puede ser expresada en términos de la otra.

Si se considera el Sistema Métrico Decimal, como sistema estandarizado para las cantidades de longitud, tenemos que sus unidades, entre otras, son el milímetro (mm), el centímetro (cm), el decímetro (dm) y el metro (m), y entre ellas guardan una relación constante de 1/10.

4.6.1. Sistema de unidades para medir longitudes:

Sea:

U_1

$1U_1$

U_2

$1U_2 = 10U_1$

U_3

$1U_3 = 10\ U_2$

Un análisis de las unidades permite establecer las siguientes igualdades $1U_2 = 10\ U_1$ y a su vez $1U_3 = 10\ U_2$, esto implica que si $1U_2 = 10\ U_1$ entonces $\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{10}$ y que si $1U_3 = 10U_2$ entonces $\frac{U_2}{U_3} = \frac{1}{10}$ y por igualación de términos $\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_2}{U_3}$. Sustituyendo

$$\frac{U_1}{10U_1} = \frac{10U_1}{U_3} \Rightarrow U_3 = \frac{(10U_1)(10U_1)}{U_1} \Rightarrow U_3 = 100U_1$$

Nótese que U_1, U_2 y U_3 pueden ser respectivamente centímetros, decímetros y el metro, y hacer uso de este tipo de relaciones es mucho más significativo y permite movilizar más conceptos matemáticos que cuando simplemente se le indica al niño que para pasar de centímetros a decímetros se corre la coma una cifra a la izquierda o que simplemente se divide por diez. O al contrario, que para expresar unidades mayores en términos de las menores se multiplica por diez o cien… o cualquier otra potencia de 10 según sea el caso.

El análisis anterior es muy importante ya que permite tender un puente con la proporcionalidad directa, vista ya, y discutida a propósito de las estructuras multiplicativas.

SITUACIÓN: Construcción de otros sistemas de unidades.

- **ESTÁNDARES RELACIONADOS**

1-3	1. Reconocer atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, capacidad, masa y tiempo) en diversas situaciones
	2. Comparar y ordenar objetos respecto a atributos mensurables.
	3. Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos Estandarizados de acuerdo con el contexto.
	4. Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.
	5. Utilizar y justificar el uso de estimaciones de medidas en la resolución de problemas relativos a la vida social, económica y a las ciencias.
	6. Reconocer el uso de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas
4-5	1. Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa- peso, tiempo y amplitud angular) en diversas situaciones.
	2. Seleccionar unidades, tanto convencionales como ESTTÁNDARizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
	3. Utilizar y justificar el uso de la estimación en situaciones de la vida social, económica y en las ciencias.
	4. Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes.
	5. Calcular el área y volumen de figuras geométricas utilizando dos o más procedimientos equivalentes.
	6. Reconocer el uso de las magnitudes y las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas.
	7. Describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando es constante una de las dimensiones.
	8. Reconocer y usar la proporcionalidad para resolver problemas de medición (de alturas, cálculo del tamaño de grupos grandes, etc.).
6 -7	1. Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
	2. Resolver y formular problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).
	3. Calcular áreas y volúmenes a través de recomposición y descomposición de figuras y cuerpos.
	4. Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.
	5. Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.
8-9	1. Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.
	2. Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
	3. Justificar la pertinencia de utilizar unidades de medida específicas en las ciencias.
	4. Diseñar estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.
	5. Resolver y formular problemas que involucran mediciones derivadas para atributos tales como velocidad y densidad.

	6. Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.
10 - 11	1. Diseñar estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.
	2. Resolver y formular problemas que involucran mediciones derivadas para atributos tales como velocidad y densidad.
	3. Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

Material: Pueden usarse hilos o varillas delgadas de madera.

Actividad 1

Córtense 4 hilos o 4 varillas (E, F, G, H) pero con la condición de que F = 4 E G= 8 E y H = 12 E.

Utilizando los hilos o varillas llenar la siguiente tabla:

Medir / Con	E	F	G	H
E				
F				
G				
H				

Discusión: ¿Si se toman E, F, G, H como unidades de medida, ellas constituyen un sistema de unidades?

Actividad 2:

Descripción: ¿Córtense 4 hilos o 4 varillas (A, B, C, D) de tal manera que B=2A, C= 2B y D= 2C?

Utilizando los hilos o varillas llenar la siguiente tabla:

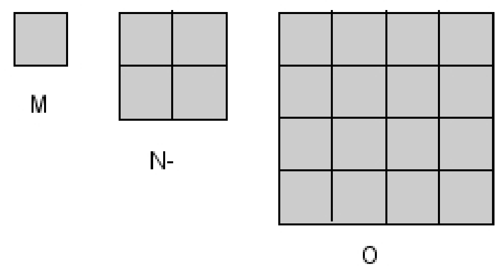
Medir / Con	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Discusión: Si se toman A, B, C, Y D, como unidades de medida, ellas constituyen un sistema de unidades?. Se deben justificar las respuestas.

¿Podrías construir otro u otros sistemas de medidas? Construye con tus compañeros de grupo otro sistema diferente de unidades para medir longitudes.

4.2.1. Sistema de unidades para medir superficie:

En forma análoga se puede analizar el caso de las unidades para la medida del área



Si se opta por escoger como unidades para medir superficies las unidades M que corresponde con la superficie de un cuadrado de lado U, y cuya área entonces corresponde con $1U^2$, tendremos que $M = 1\ U^2$. Si comparamos o medimos N con M tendremos que $N = 4\ U^2$, igualmente $O = 16\ U^2$, podemos constatar que $\frac{M}{N} = \frac{1U^2}{4U^2}$, igualmente $\frac{N}{O} = \frac{4U^2}{16U^2} = \frac{1}{4}$, luego las unidades M, N, O de acuerdo con la definición de sistema de unidades, se constituyen en un sistema de medidas de razón $\frac{1}{4}$.

Actividad:

Material: Hojas de papel milimetrado.

Descripción:

- Sombrear el área que corresponde a un mm^2, un cm^2, un dm^2.
- Recortar un cm^2, un dm^2.
- Construir un m^2

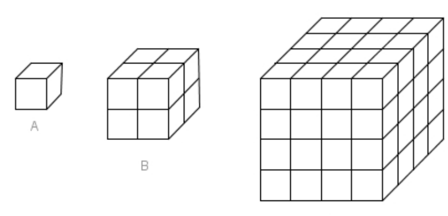
Análisis:

Permitir que los niños tengan contacto con las unidades de medida, su manipulación y su uso para medir superficies ayuda a comprender los procesos aritméticos que permiten escribir unas unidades en términos de las otras, en relación con procesos de medida y con el uso de las unidades:

$1cm^2 = 100\ mm^2$ implica que $\frac{mm^2}{cm^2} = \frac{1}{100}$ o también: $\frac{cm^2}{dm^2} = \frac{1}{100}$ lo que nos permite ver que 100 $cm^2 = 1\ dm^2$ y a su vez: $\frac{dm^2}{m^2} = \frac{1}{100}$, o sea que $1m^2 = 100\ dm^2$.

Lo anterior debe conducir a que la regla aritmética con relación a las unidades de área, surja en el proceso como una consecuencia del análisis realizado.

4.2.2. Sistema de unidades para medir volúmenes:



Demos una mirada análoga al problema de las unidades para medir volúmenes y las relaciones que permiten identificar la razón que las caracteriza como sistema. Si se considera un cubo de lado 1U como unidad de medida, como en la figura, cubo A, éste tendrá un volumen correspondiente de A = $1U^3$.

Si se mide el volumen de B con la unidad A se obtiene B = 8 U^3, (2^3A) y desde luego la razón de $\frac{A}{B}=\frac{1U^3}{8U^3}$. Ahora se puede comparar la medida del volumen de la unidad C con respecto a la unidad B, y se tiene que C = 8 B o (2^3B), lo cual permite establecer la razón $\frac{B}{C}=\frac{1}{8}$.

Obsérvese que la base sobre la cual se construyó el sistema es dos, lo cual permite ver la razón de las unidades como $\frac{1}{2^3}$.

Si se considera, en forma semejante el sistema decimal (base diez) en donde las unidades son mm^3, cm^3, dm^3 y m^3, se puede establecer las relaciones entre sus unidades así: según el caso anterior: $\frac{mm^3}{cm^3}=\frac{1}{10^3}$, luego 1$cm^3$ = 10^3mm^3= 1000mm^3. $\frac{cm^3}{dm^3}=\frac{1}{10^3}$, un dm^3 = 10^3cm^3 = 1000cm^3. $\frac{dm^3}{m^3}=\frac{1}{10^3}$, implica que 1$m^3$ = 10^3dm^3 = 1.000 dm^3.

Actividad :

Materiales:

Dados o cubos de un centímetro de arista.
Papel milimetrado.
Cartón paja.

Descripción:

Construir unidades cúbicas de medida:

El cm^3: tomar un cubo de madera o un dado, de 1cm de arista y forrarlo con papel milimetrado.

El dm^3: cortar 6 cuadrados de 10 centímetros de lado en cartón paja y con ellos formar un cubo de 10 centímetros de arista. Cortar cuadrados de 10 centímetros en el papel milimetrado y forrar el cubo.

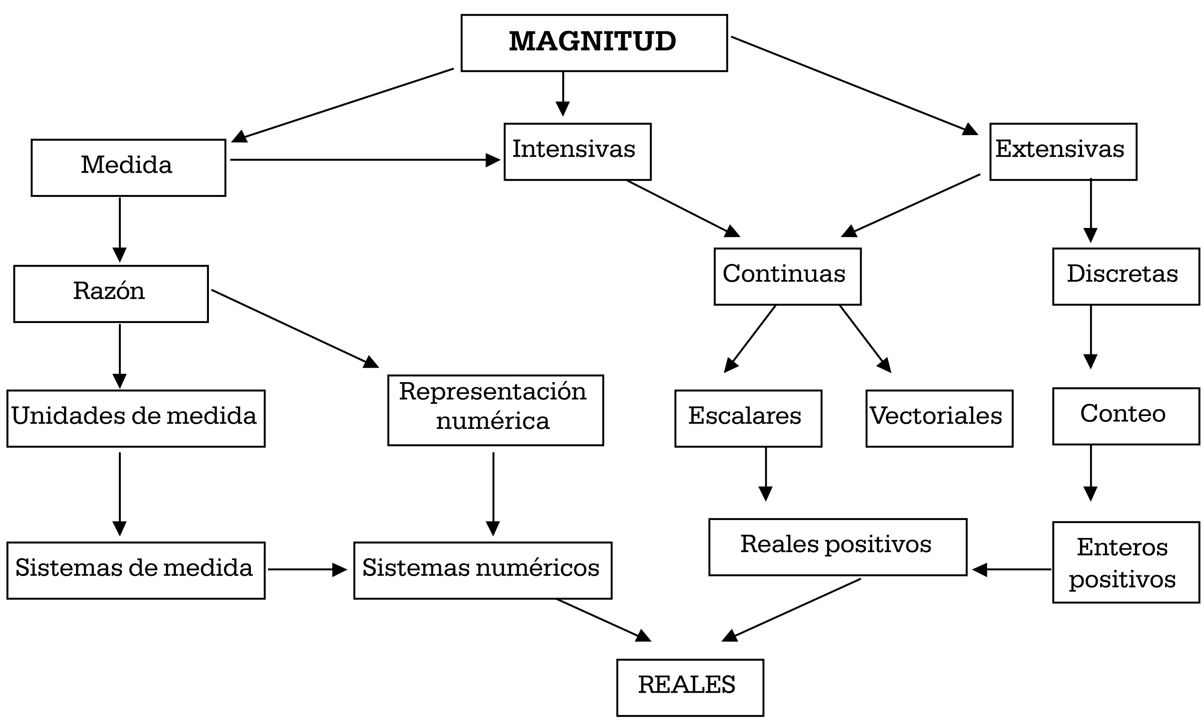
El m^3: Con seis cuadrados de cartón paja formar un cubo de un metro de arista.

Utilizando los cubos construidos llenar la siguiente tabla:

Medir / Con	mm^3	cm^3	dm^3	m^3
mm^3				
cm^3				
dm^3				
m^3				

Después de construidas las unidades de medida descritas anteriormente, se sugiere discutir con los alumnos las relaciones encontradas, haciendo énfasis en la medición de unas unidades con otras. Allí se busca que el alumno termine por aritmetizar las relaciones en términos de las conversiones de las unidades de medida para volúmenes.

El siguiente esquema conceptual, da cuenta de los elementos teóricos mencionados anteriormente, y permite entender algunas relaciones entre ellos; tiene en cuenta, por lo tanto conceptos como magnitud y sus procesos de medición, sistemas tanto métricos como numéricos.



4.7. Instrumentos de medida

En los procesos de medición intervienen muchos factores que afectan el resultado de ésta. De un lado están los factores humanos o que dependen de quien la realiza y de otra parte están los factores asociados a los instrumentos de medida.

Un instrumento de medida es un objeto que comparte con los objetos a medir la misma magnitud, y en el cual se ha determinado:

4.7.1. Una escala. Constituida por una serie de marcas que indican en forma sucesiva y continua cómo puede trasladarse o superponerse la unidad elegida en el instrumento de medida. De allí que la separación entre dos marcas continuas coincide con la unidad elegida para la medición y se constituye en la "constante del instrumento". Para facilitar las mediciones, algunas marcas son identificadas con números, sobre todo las que indican algún número entero que facilita el conteo sobre la escala (0, 5, 10…). En un mismo instrumento pueden aparecer dos o más escalas superpuestas. Es el caso de las cintas, en donde aparecen varias unidades del sistema métrico: milímetro, centímetros, decímetros y metros, puestas sobre una misma escala. También se habla en este caso de la calibración del instrumento.

4.7.2. Un rango de la escala (x_m) que corresponde a la diferencia entre
el valor máximo medible en la escala (x_{max}) y el valor mínimo medible en la escala (x_{min}):
$x_m = x_{max} - x_{min.}$

Otras características asociadas a los instrumentos de medida son: la sensibilidad, la precisión y la fidelidad. Un instrumento de medida es más sensible en tanto más pequeña sea la constante del instrumento, cosa que se obtiene calibrándolo en unidades de medida muy pequeñas.

Un instrumento es muy preciso si diferentes observadores leen el mismo valor de una cantidad, lo cual se logra disminuyendo el paralelaje. Un instrumento es fiel si sus características no cambian apreciablemente con el tiempo.

Otro factor determinante en la medición es el error instrumental, que depende del fabricante del instrumento de medida, y tiene que ver con la separación entre el valor medido de una cantidad con el instrumento dado y el valor obtenido con un etalón, Δx, (etalón tomado del francés = patrón). Un patrón es un instrumento que da los verdaderos valores de la cantidad medida, y por ello se usa para calibrar otros instrumentos. El error instrumental se obtiene multiplicando Δx por 100 y dividiéndolo por el rango de la escala del instrumento; ello nos da k, que es el porcentaje o clase de exactitud del instrumento.

En el proceso de la medición, también debe tenerse en cuenta el error de lectura, además de los factores asociados a quien realiza la medición y de las condiciones del objeto a medir. Éste error depende de la calibración del instrumento, la cual está asociada a las marcas más pequeñas en la escala de lectura. La lectura y expresión de una medida dependen de dichas marcas. La siguiente situación ilustra lo expuesto:

Una cinta métrica que esté calibrada en decímetros, sólo permitirá expresar una medida en décimas de metro o decímetros, y no en centímetros o centésimas de metro, y se expresará teniendo en cuenta la división más próxima al extremo del objeto a medir. A continuación se indica, más o menos, una unidad de medida: $m = x \cdot u \pm u$.

El error absoluto de una medición se obtiene sumando el error instrumental y el error de lectura.

4.8. Tipos de medición

Se dice que una medición es directa, si el instrumento de medida se aplica directamente a la magnitud a medir; e indirecta, si recurrimos a procedimientos en los cuales no se hace uso de instrumentos de medición, sino de conceptos teóricos producto de la medición, como es el caso de fórmulas para calcular medidas. De ambas mediciones pueden surgir medidas enteras y racionales:

4.8.1. Medida entera:

Si se tiene que medir una longitud, representada en un segmento AB, por ejemplo; y si se toma para su medida la unidad e, y se verifica que la medida de $AB=ne$, entonces se dice que $n \in N$, es la medida de AB con respecto a e. Para ello, se supone que al replicar la unidad sobre la longitud al cabo de n veces, el extremo B de la longitud coincide con el extremo de la unidad e.

4.8.2. Medida racional:

Como en el caso anterior, si se tiene que al cabo de n veces e sucede que: $ne < AB < (n+1)e$, decimos que la medida es racional. Dado el caso que $ne < AB < (n+1)e$, entonces se debe tener en cuenta que existe un punto C entre AB, tal que $CB<e$, $AC+CB=AB$. Si se quiere tener una medida exacta o más cercana de AB, es necesario dividir a e en d partes iguales, tal que $e=de_1$; y así la medida de CB con la nueva unidad e_1 puede ser $n_1e_1 <CB< (n_1+1)e_1$ con $0 < n_1 < d$. Ahora, si la medida de CB es $n_1e_1=CB$, entonces la medida de AB será el número racional $AB=(n+n_1/d)e$ con la unidad e. Cuando existe este racional que permite expresar la medida, decimos que AB es conmensurable con la unidad e. Pero si $n_1e_1 <CB < (n_1+1)e_1$ implica extender la posibilidad de subdividir en partes cada vez más pequeñas las subdivisiones de e, presentándose que la medida de un segmento AB con respecto a e es la sucesión: $n+(n_1/d) + (n_2/d^2)+ ... + (n_x/d^x)$. En caso de que la sucesión sea finita, se dice que el límite de ella, si lo hay, es la medida de AB con respecto a e; en caso de que la sucesión sea infinita y no exista el límite, se dice que AB es inconmensurable con la unidad e, como ocurre con respecto al lado del cuadrado y su diagonal.

Este tratamiento matemático de las magnitudes y de los conceptos y procesos ligados a ellas, nos permite, en primer lugar identificar unos ejes o puntos de referencia que estructuran el pensamiento métrico, y, en segundo lugar, identificar líneas que permiten diseñar las situaciones didácticas y su posterior análisis. Con respecto a lo primero, se constituyen en ejes articuladores del pensamiento métrico conceptos como: la unidad y el patrón de medida, la medida, el sistema de medida y la magnitud, como tal. Además de procesos relacionados con él como: medición, aproximación y cálculo con unidades de medida.

En cuanto a lo segundo, estos referentes conceptuales, se constituyen en los ejes sobre los cuales se plantearán las situaciones didácticas y sobre los cuales se harán sus respectivos análisis. De allí que éstas deben estar sobre contextos de medida donde se ponen en juego la identificación y el reconocimiento de las unidades y los patrones de medida, y el reconocimiento de las magnitudes objeto de la medición; además de permitir el desarrollo de habilidades relacionadas con los procesos de medición, tales como el uso de instrumentos de medida, la asignación numérica, la estimación de medidas y el cálculo con las unidades.

Unidad No.5

Situaciones relacionadas con la Magnitud Longitud

Desde un punto de vista didáctico, cada magnitud debe construirse partiendo del reconocimiento de una cualidad común en una serie de objetos, lo cual implica agrupar distintas clases de objetos y homogenizarlos, formando clases de equivalencia, para obtener el conjunto de cantidades, como se mostró antes en relación con el concepto de magnitud.

En un segundo momento, es necesario reconocer la suma de magnitudes y sus respectivas propiedades en un contexto de aplicación, más que la sola descripción de éstas.

Con relación al concepto: Al construir un conjunto $O = \{\overline{AB}, \overline{CD}\}$, se reconoce una cualidad particular que permite diferenciar los objetos que pertenecen al conjunto O. Es decir el conjunto de cintas, cuerdas, objetos y segmentos fijos, de los que se pueda percibir esa cualidad particular llamada longitud. En palabras de Godino (2002), "en el conjunto O, unas bandas (o segmentos) son superponibles entre si y sus extremos coinciden. Dos segmentos están relacionados si son congruentes, esto es, si es posible superponerlos mediante un movimiento de tal modo que coincidan sus extremos".

De lo anterior se desprende la necesidad de hacer comparaciones y comprobaciones de la igualdad o desigualdad para establecer una relación de equivalencia en el conjunto O; obteniendo por lo tanto clases de objetos que son iguales entre sí, con relación a la cualidad **longitud.**

La **cantidad de longitud** corresponde al conjunto de las clases de equivalencia, cada una de las cuales queda caracterizada porque sus elementos tienen todos algo en común, la misma **cantidad de longitud.**

De otro lado, los niños construyen el concepto de "longitud **",** por abstracción, es decir, que requieren ser enfrentados a una serie de actividades con colecciones de objetos que posean esta característica. Dichas actividades deben ser más de comparación, de distintas cantidades; esto requiere seleccionar una cantidad representante de longitud (unidad), para determinar la medida de la longitud en términos de ella, es decir la medida con u de la cantidad.

Otro aspecto muy importante en la enseñanza de los conceptos relativos a la longitud, es la suma de cantidades, considerando las propiedades asociativa y conmutativa.

A manera de ejemplo:

Dados los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$, consecutivos, con $\overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{CD} = \varnothing$, o no comparten mas que un punto en común, el segmento $\overline{AD} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD}$ es la suma de los tres segmentos y se expresa por $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$.

5.1. Situación uno: "Las tres reglas"

La siguiente situación está pensada con el propósito de sacar a los estudiantes del "cerrado concepto de unidad de medida" cuando ya lo tienen, es decir, a aquellos que a pesar de estar en un grado avanzado en Educación Básica, asumen la unidad y el instrumento de medida como la misma cosa, ó para quienes se inician en los conceptos relativos a las magnitudes y a la medición como los más chicos, para que lo hagan desde una comprensión de dichos elementos, en el proceso mismo de medir, con instrumentos no convencionales y unidades no estandarizadas. Además se espera que en el proceso de aplicación de la situación, los estudiantes comprendan que "el centímetro no es ni la única unidad de medida de longitud" , ni corresponde a la "línea" o a las líneas de división de la cinta métrica.

Propósitos:

- Reconocer y utilizar unidades de medida de longitud.
- Asignar correctamente un número a una medida dada.
- Utilizar una unidad y un instrumento de medida no convencionales.
- Establecer relaciones entre diferentes unidades de medida de longitud.

- **ESTÁNDARES RELACIONADOS**

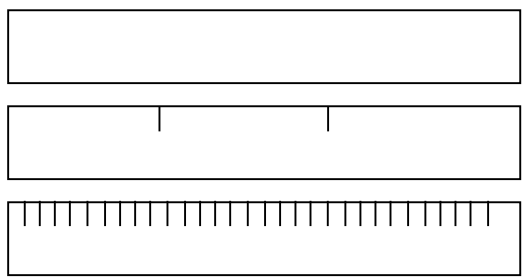
A continuación se presentan los Estándares asociados a las ideas anteriores sobre la medición de magnitudes, que pueden ser movilizados a través de la presente situación.

Tipo de pensa. / **Grupos de Grados**	**Métrico**	**Numérico**
1o a 3o	• Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos Estandarizados de acuerdo con el contexto. • Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.	• Reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros) • Describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes.

Tipo de pensa. / Grupos de Grados	Métrico	Numérico
8o a 9o	• Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficie, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.	

Materiales:

Hojas de trabajo individual con las instrucciones, tres cintas de papel: la primera cuyo nombre es **regletón** y de la cual se indica que α es la unidad en que está graduado, la segunda cinta denominada **regla**. graduada en unidades β y una tercera cinta **reglilla** de la cual se dice que λ es cada unidad en que está graduada; como indica la siguiente gráfica.



Regletón

Rega

Reglilla

Descripción:

Las siguientes actividades permiten discutir y analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes al enfrentar la situación relacionada con el manejo de unidades e instrumentos, y también en relación con procesos de comunicación y validación de resultados. La situación está pensada en dos momentos, para el primer caso (actividades 1 a 3) se tienen mediciones con unidades más grandes que la longitud a medir; y para el segundo momento (actividad 4), los objetos de la medida son más grandes que las unidades a utilizar.

Actividad 1:

A cada estudiante se le entrega una cinta o tirilla de papel sin marcas que denoten subdivisiones; ello con el ánimo de hacer coincidir la unidad de medida y el instrumento con que se mide; y se le pide que mida con ella el largo de su cuaderno o del libro. Se llama "regletón" a esta primera regla y **alfa** (α) a la unidad en que está graduada.

Actividad 2:

Luego se hace una discusión sobre los valores obtenidos; los estudiantes deben justificar sus respuestas y procedimientos.

Se entrega una segunda cinta al estudiante para que mida nuevamente el largo del cuaderno (el mismo que midieron en la actividad anterior). La segunda cinta está dividida en tres partes iguales. Se llama "regla" a la segunda cinta y **Beta** (β) a la unidad en que está graduada. También se socializan los resultados obtenidos.

Se entrega una tercera cinta graduada y se repite el proceso. Se llama “reglilla” a la nueva regla y **lambda** (λ) a la unidad en que está graduada.

Ahora, el docente propone a los estudiantes un juego de comparaciones entre las tres cintas midiendo unas unidades con otras (actividad 3).

Actividad 3:

Por último se pide llenar la tabla siguiente escribiendo en cada casilla los resultados de medir las unidades de cada instrumento con las de los otros, así: medir alfa (horizontal-fila) con alfa (vertical-columnas), medir beta (horizontal) con alfa. Por ejemplo, al medir β con λ, se obtiene 6, así: 1 β=6λ.

Medir / Con	α	β	λ
α			
β			
λ		6	

Situación uno, medida de unas unidades con otras

Análisis

En la actividad uno, se espera que el estudiante mida el largo de su cuaderno, con el regletón, y, dado que la longitud objeto de la medición es más pequeña que la unidad de medida, que exprese la medida con un número racional y en términos de α. Por ejemplo: “el cuaderno mide una tercera parte de α”, “más o menos medio α”. El expresar la medida del cuaderno como “medio regletón”, o algo así, daría cuenta de una confusión entre la unidad y el instrumento con que se mide.

En la discusión deberá surgir la necesidad de utilizar otros instrumentos con otras unidades para hacer la medida correspondiente. Por lo tanto debe replantearse la necesidad de medir utilizando otras unidades que permitan mayor precisión; así, se les entregará “reglilla”, y obtendrán resultados como: 25λ o 30λ; algunos inclusive podrán pensar en utilizar las dos últimas unidades, así:2β y 8λ para expresar la medida de alguna longitud.

Para la actividad tres, se pone en juego la correspondencia única entre el conjunto de los números reales y el conjunto de las magnitudes mediante la función medida, cuando al tomar α como unidad de medida, se le hace corresponder el número real 1; pero cuando se toma a β como unidad de medida, el real 1 le corresponde a β , y a α en términos de la relación con β le corresponde otro número real. Se espera, por tanto, que el alumno haga una asignación numérica en los siguientes términos:

Medir / Con	α	β	λ
α	1	1/3	1/18
β	3	1	1/6
λ	18	6	1

La tabla así diligenciada daría cuenta de que el alumno reconoce las unidades de medida y los instrumentos con que se mide; además de una correcta asignación numérica en los dos sentidos de la actividad: uno, cuando la unidad es más pequeña que el objeto a medir y su medida es entera; y otro, cuando la unidad es más grande que el objeto a medir y, por tanto, su medida se expresa con un número racional.

Actividad 4:

Descripción: Dado que en las actividades anteriores se presenta el hecho de medir objetos en donde la unidad casi siempre resultaba más grande que la longitud a medir, se propone una situación en donde los objetos de la medida sean más grandes que las unidades (α,β y λ).

Se les pide medir con el ***regletón, la regla y la reglilla*** (cintas de papel), longitudes de objetos como el largo o el ancho del tablero, el ancho de una ventana, ancho y largo de un escritorio.

Se espera que los resultados de las nuevas mediciones sean expresados en términos de alfa, beta y lambda, que son las unidades puestas en juego. Como también que se utilice el conocimiento anterior de la medida de unas unidades con otras.

Largo de…tablero… $n\ \alpha$ *más* $n_1/m_1\beta$
Ancho de $n_2\ \beta$ *más* $n_3/m_1\beta$
Largo de… $n\ \alpha$ *más* $m\beta$ más $k\lambda$ con m, m_1, n, n_1, n_2, n_3 enteros y m, m_1 divisores de n, n_1 y n_3 respectivamente.

Este segundo momento se pone a fin de contrastar las unidades con objetos que resultan de mayor longitud que los propuestos en el primer momento, lo cual genera algunas dificultades en los estudiantes, cuando encuentran cantidades de magnitud mayores al ser expresadas con las unidades de menor longitud.

5.2. Situación dos: "Midiendo metros y centímetros"

Si bien es cierto que los estudiantes aún de la primaria, ya están inmersos en el manejo que culturalmente se le ha dado al tema de las medidas, especialmente a lo relacionado con el metro, aún se pude intentar una enseñanza de dichos aspectos a través de los procesos de medición directa de magnitudes y estableciendo, por lo tanto la relación entre unas y otras unidades.

Actividad 1:

Propósitos:

- Reconocer algunas de las unidades del Sistema Métrico Decimal, para medir la magnitud longitud y su relación de equivalencia en contextos de medida.
- Usar instrumentos de medida.

- **ESTÁNDARES RELACIONADOS**

Pensamiento Métrico:	
1º a 3º	Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos Estandarizados de acuerdo con el contexto.
4º - 5º	Seleccionar unidades, tanto convencionales, apropiadas para diferentes mediciones.
	Utilizar y justificar el uso de la estimación en situaciones de la vida social, económica y de las ciencias.
	Interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, razones y proporciones.
6º - 7º	Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.
	Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.

Materiales:

Hoja de papel con tabla para registrar los datos.
Cinta métrica graduada en decímetros, centímetros y milímetros.
Consignar el valor de la medida de unas unidades cuando son medidas con otras.
Utilizando la cinta métrica que acabas de recibir llena la siguiente tabla.

Unidades del Sistema Métrico Decimal

Medir / Con	**Milímetro (mm)**	**Centímetro (cm)**	**Decímetro (dm)**	**Metro (m)**	**Decámetro (Dm)**
Milímetro (mm)					
Centímetro (cm)					
Decímetro (dm)					
Metro (m)					
Decámetro (Dm)					

Descripción:

Cada estudiante recibe una hoja con la tabla y una cinta métrica, con la tarea de consignar el valor de la medida de unas unidades cuando son medidas con otras.

Con esta situación se busca continuar con el reconocimiento de unidades y establecer equivalencias entre las unidades del Sistema Métrico Decimal.
Se dispone de cintas métricas (calibradas en centímetros, y en milímetros), así:

0 .... 50 (cm)
50 .... 150 (cm)
0 .... 150 (cm)

Se deja que los estudiantes seleccionen libremente la cinta para medir diferentes longitudes. Ellos, (la mayoría) eligen la última cinta por creer que ese es realmente el metro. Luego se les pide que llenen la tabla, midiendo unas unidades con otras, en donde se ponen en juego algunas de las unidades del Sistema Métrico Decimal: milímetro (mm), centímetro (cm), decímetro (dm), metro (m), decámetro (Dm).

El trabajo puede ser complementado si colocamos una tabla que contenga otras unidades de longitud como la vara, la yarda, el pie…no sólo para darlas a conocer sino también para verificar propiedades en relación con las del sistema métrico.

Análisis

La actividad de llenar la tabla mediante la comparación entre sí de las unidades del Sistema Métrico y otras que no pertenecen a él, permite reconocer las unidades de longitud del mismo y establecer las relaciones entre ellas.

Con lo anterior se puede ampliar el trabajo realizado en la situación uno porque el alumno, mediante un proceso de medición, avanza en la interiorización del concepto de unidad de medida y de su relación con otras unidades. Al igual, que amplía la idea de las actividades tres y cuatro, las cuales tienen que ver con la asignación numérica de la medida, cuando un elemento del conjunto de las magnitudes es tomado como unidad de medida; caso en el cual le corresponde el real 1.

Dada la relación constante entre las unidades, se puede expresar unas en términos de las otras, como lo muestra la tabla siguiente, en donde se incluyen otras unidades de medida, ahora con el sistema inglés. Se resaltan las mediciones con las unidades del sistema métrico a fin de ver las regularidades numéricas que aparecen en sus medidas y pueden ser comparadas con los otros resultados.

Medir / Con	Mm	Cm	Dm	m	Pie	pulgada	vara	yarda	Dm
mm	1	10	100	1000	304	25	800	914	10000
cm	0.1	1	10	100	30.4	2.5	80	91.4	1000
dm	0.01	0.1	1	10	3.04	0.25	8	9.14	100
m	0.001	0.01	0.1	1	0.304	0.025	0.80	0.914	10
pie	0.00328	0.0328	0.328	3.289	1	0.0835	2.631	3.006	32.89
pulgada	0.0393	0.393	3.937	39.37	11.96	1	31.49	35.98	393.7
vara	0.00125	0.0125	0.125	1.25	0.38	0.03175	1	1.1425	12.5
Yarda	0.00109	0.0109	0.1094	1.094	0.3326	0.02778	0.875	1	10.94
Dm	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.0304	0.00254	0.08	0.0914	1

Situación 2. Resultados esperados

Para el desarrollo de la situación.

Inicialmente se debe hacer un diálogo con los estudiantes sobre las unidades más conocidas de longitud, masa y tiempo. Se puede proponer un conversatorio sobre el origen de algunas unidades y medidas en instrumentos de medición de estas magnitudes, situación que puede hacerse con base en las formas particulares de medir. Luego se puede proponer a los estudiantes que midan unas unidades con otras, tanto del mismo sistema como de otros sistemas; por ejemplo, el sistema inglés. Los estudiantes tienen disponibles las cintas métricas, cintas de papel del tamaño de una pulgada y de un pie; además, tienen la posibilidad de medir longitudes mayores con la cinta. Es muy importante que las unidades no estén nombradas y no estén las marcas que indican las unidades numeradas.

Actividad 2: Estimación de una longitud

Ahora se pretende orientar a los estudiantes en un proceso poco común en el contexto escolar pero muy necesario en el ambiente cotidiano y extraescolar de los niños, como es el proceso de la estimación de longitudes.

Materiales:

Cintas de papel.
Hoja de trabajo con preguntas e instrucciones relacionadas con actividades de medición:

Construye los siguientes instrumentos para medir longitudes:

a) Una cinta ***a*** sin divisiones y de un metro de larga.
b) Una cinta ***b*** con diez divisiones iguales y de un metro de larga.
c) Una cinta ***c*** con cien divisiones y de un metro de larga.

Estimación con instrumentos y objetos ausentes:

Teniendo en cuenta los instrumentos de medida que acabas de realizar, completa la tabla siguiente sin que hagas las mediciones respectivas. Debes permanecer en tu puesto.

Cuánto crees que mide / **en**	**C centímetros**	**B decímetros**	**A metros**
El ancho de la puerta del aula de clase.			
El alto de la puerta del aula de clase.			
El largo del tablero del aula de clase.			
El largo de tu cuaderno			

Completa la información de la siguiente tabla.

en / Cuánto crees que mide	C centímetros	B decímetros	A metros
El largo de una cama.			
El ancho (frente) de una nevera.			
El ancho (frente) de una estufa.			
El ancho (frente) de una lavadora.			

Nota:

Utiliza las cintas realizadas en la actividad, primera parte, para que verifiques los datos entregados en las tablas.

Descripción: Esta actividad se desarrolla en torno a dos actividades: primero, estimar una longitud teniendo presentes el objeto y la unidad en que se expresa la medida objeto de estimación. Una segunda actividad que tiene que ver con estimar una longitud, teniendo la unidad presente y el objeto ausente.

El alumno debe construir tres instrumentos de medida: a, b, c, que correspondieran a un metro sin divisiones, (a); un metro con divisiones que corresponden cada una a un decímetro, (b) y un metro con divisiones que corresponden cada una a un centímetro (c).

Actividad 3: Estimación con unidad y objetos presentes

Después de elaborar los instrumentos de medida, anteriormente descritos, se les pide completar la siguiente tabla, con la consigna: utilizando los instrumentos de medida que acabas de construir, pero sin hacer la medición directa, completa los datos pedidos:

en / Cuánto crees que mide	C centímetros	B decímetros	A metros
El ancho de la puerta del aula de clase.			
El alto de la puerta del aula de clase.			
El largo del tablero del aula de clase.			
El largo de tu cuaderno			

Estimación con unidad y objetos presentes

Actividad 4: Estimación con la unidad presente y el objeto ausente

En forma similar a la anterior, se pide llenar la tabla siguiente:

en / Cuánto crees que mide	C centímetros	B decímetros	A metros
El largo de una cama.			
El ancho (frente) de una nevera.			
El ancho (frente) de una estufa.			
El ancho (frente) de una lavadora.			

Estimación con unidad presente y objetos ausentes.

La estimación es una actividad mental que se entiende como la capacidad de un individuo para calcular una medida de una magnitud sin replicar o superponer la unidad de medida sobre el objeto de la medición. Como afirma Del Olmo Romero (1993)

> *"estimar es el proceso de obtener una medida, o medir sin la ayuda de instrumentos, es decir, consiste en realizar juicios subjetivos sobre la medida de los objetos. Una estimación es el resultado de estimar; es la medida realizada a ojo de una determinada cualidad medible de un objeto"* (p. 88).

Tal proceso requiere cierta habilidad mental que tiene que ver con la capacidad para determinar el tamaño y rango de las unidades y la percepción de las magnitudes objeto de la medida.

La medida objeto de la estimación no es tan aproximada como la medida misma, y se considera aceptable cuando se establece dentro de unos rangos que se consideran permitidos, teniendo en cuenta la unidad en que se expresa, el orden y la escala de las unidades de la medida: una diferencia de 3 milímetros en la apreciación de una medida del alto de una hoja de cuaderno no sería aceptable, en tanto, que una diferencia de cinco milímetros al estimar el largo de una hoja de cuaderno puede tomarse como una buena estimación de dicha medida. Otros factores que pueden indicar cierta capacidad para estimar correctamente tienen que ver con esa "capacidad para guardar las relaciones y proporciones" de las medidas cuando éstas están asociadas a familias de objetos en donde, por la experiencia con ellos, sin necesidad de recurrir a una medida directa, se percibe cual es más largo que otro. También tiene incidencia en la estimación de una medida el hecho de si se conoce la unidad de medida en que ésta ha de expresarse, y si el objeto está presente o ausente. Habrá mayor probabilidad de éxito en el primer caso que en el segundo.

Para esta actividad se consideraron adecuadas las recomendaciones en Del Olmo Romero (1993, p.88):

- Los adultos, en general, y los maestros en particular, no tenemos desarrollada esta habilidad.
- No se dispone de orientaciones lo suficientemente precisas sobre cómo hacerlo.
- No se tiene en cuenta el tiempo preciso para desarrollarlas.
- Es difícil poner a prueba estas habilidades.

5.3. Situación tres: La tubería en el barrio

Después de hacer un reconocimiento de diferentes unidades e instrumentos para medir longitudes, y enfrentarse a tareas de medición y estimación de longitudes, los estudiantes pueden utilizar estos conceptos en contextos de la vida cotidiana, de las Matemáticas y de otras ciencias.

Propósitos:

- Usar unidades de medida no convencionales en contextos propios de medida.
- Expresar correctamente las medidas de las longitudes entre los puntos PZ, siguiendo las trayectorias indicadas, en términos de ***a, b, c,*** como unidades.
- Hacer conversiones entre unidades de medida.

- **ESTÁNDARES RELACIONADOS**

Pensamiento Métrico	
1º a 3º	Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos Estandarizados de acuerdo con el contexto.
	Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.
4º - 5º	Seleccionar unidades, tanto convencionales, apropiadas para diferentes mediciones.
	Utilizar y justificar el uso de la estimación en situaciones de la vida social, económica y de las ciencias.
6º - 7º	Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.
	Resolver y formular problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas
Pensamiento Numérico	
	Interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, razones y proporciones.
	Identificar, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.
	Utilizar números (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
	Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.
	Reconocer los significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, localización, entre otros)
8º - 9º	Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
	Reconocer el uso de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas.

Descripción:

Se entrega a los estudiantes, en forma individual una hoja en donde se simula un plano de un barrio, la parte central del pueblo. En éste se indican varios caminos para recorrer desde el punto P al punto Z señalados en el plano y se pide a los estudiantes que, en un primer momento, describan 6 caminos o rutas para ir del punto P al punto Z, indicando los puntos, ejemplo: R1 = P – R – F – M – Z. Además que indiquen cuál creen que es el camino más corto:

1. Describe seis formas diferentes para ir del punto P al punto Z, indicando sólo los puntos a recorrer: ej. R_1: P-R-F-M-Z, o marcando con lápices de distinto color dichos recorridos.

2. ¿Cuál crees que es la ruta más corta?

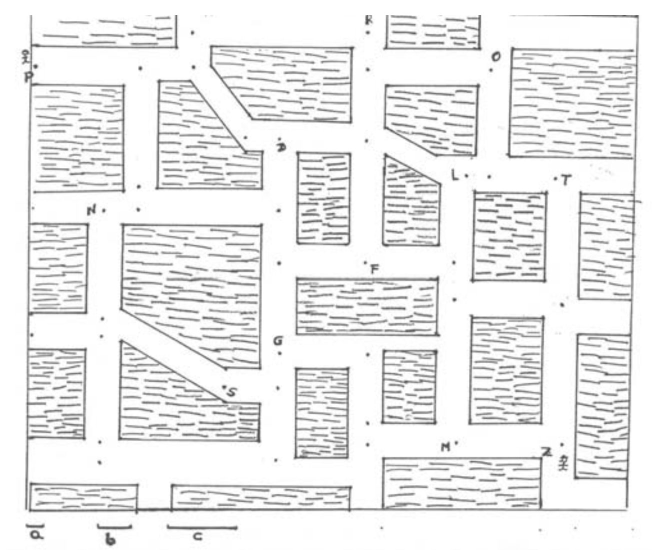
3. Se quiere contratar una firma de ingenieros para construir una alcantarilla, de un metro de diámetro y en tubos de cemento, en un barrio entre los puntos P y Z, siguiendo la trayectoria marcada en el centro de las calles, como aparece en el plano. Se contratará la obra que resulte más económica y con las especificaciones dadas

   Estudios preliminares dicen que:

   - En el mercado se consiguen tubos de largo ***a, b, c***, como aparece en la parte inferior del plano.
   - Los tubos no se pueden cortar, debido a su diámetro y al material con que están hechos.
   - Cada empate entre dos tubos aumenta el costo en un millón de pesos porque requiere de obras secundarias.

   ¿Cuál es el menor costo de la obra si se sabe que el costo de la alcantarilla es dos millones por tramo de tamaño ***b*** instalado?

Plano para la actividad:[5]



[5] Sería muy interesante que el plano fuese el resultado de una actividad de campo de medición y elaboración por parte de los estudiantes, en aquellos sitios en donde las condiciones de seguridad u otras lo permitan. Así se ampliaría y se aplicaría en un contexto específico lo ya trabajado con las unidades del sistema métrico sobre el papel.

Análisis

Se trata de medir una distancia dada dividida en tramos rectos, que resultan conmensurables con unas, no todas, las unidades asignadas para ello, se plantea una situación (segunda actividad) que obliga al uso de las unidades propuestas, y luego, según las condiciones del problema planteado, se deben realizar conversiones entre ellas para hallar la solución correcta.

Al determinar la longitud *PZ*, dadas las unidades ***a, b y c*** en los términos de la pregunta realizada, que es determinar la longitud entre los puntos *PZ* siguiendo las posibles trayectorias, se espera que el alumno replique la unidad ***a*** y la traslade sucesivamente a partir de uno de los extremos hasta alcanzar el otro extremo, y en una actividad de conteo determine el número de veces que ***a*** cabe en *PZ* $m_a(PZ)$= k veces ***a***. Allí todos los segmentos de las diferentes rutas, que forman a *PZ*, contienen exactamente a la unidad ***a.***

En un segundo momento, al medir *PZ* con la unidad ***b,*** $m_b(PZ)$,[6] el estudiante tratará de reproducir la experiencia obtenida con la unidad ***a***; pero dado que hay tramos no conmensurables con ***b***, se verá forzado a replantear su estrategia y buscar alguna relación de ***b*** con la unidad ***a***, como alternativa de solución. Las unidades puestas guardan una relación de ½, esto es, ***a*** = ½ ***b*** o ***b*** = 2 ***a***. Ello implica replantear la medida inicial de k ***. a*** en términos de la nueva unidad***, b***. $m_a(PZ)$ = k . ***a*** = k . ½ ***b = ***$m_b(PZ)$. De la misma forma al hallar $m_c(PZ)$, ello dado que el problema restringe la situación a usar el menor número posible de empates, tendrá que buscar la relación entre las unidades ***a, b*** con respecto a ***c*** y determinar que ***b*** = 2 ***a*** y ***c*** = 2 ***b*** o que ***a*** = ½ ***b*** y ***b*** = ½ ***c*** y por tanto ***a/b*** = ***b/c*** = ½.

Así mismo, si se piensa en la relación de las unidades ***a, b, c ,*** se tendrá un sistema de unidades no convencionales y un sistema de unidades cuyo rango de los múltiplos y submúltiplos dependen de las potencias de dos; así, si tomamos ***b*** como unidad, ***b*** es de rango 0, ***b*** = 2^0 = 1, y ***a*** es un submúltiplo de ***b, a= ½ b*** o $\mathbf{2^{-1}}$ **b** , ***c*** sería un múltiplo de ***b*** y dada su relación ***b/c = ½*** , entonces, ***2b = c*** , que equivale a tener ***2. 1 = 2 o*** $\boldsymbol{2^1}$, por tanto ***c*** sería de rango 1.

Unidad a	Unidad patrón b	Unidad c
½ b	1	2 b
2^{-1}	2^0	2^1

Relación entre las unidades a, b, c.

Lógicamente que en una segunda etapa se podrán poner en juego las unidades de los sistemas convencionales, y permitir que el alumno las identifique, las relacione, y descubra cómo éstas conforman un sistema. Este es el caso del Sistema Métrico Decimal, en el cual las unidades se relacionan manteniendo una relación constante de 10:

[6] $m_b(PZ)$ se lee medida de PZ con la unidad b.

1metro (m) = 10 decímetros (dm)
1 decímetro (dm) = 10 centímetros (cm)
1 centímetro (cm) = 10 milímetros (mm)

Se considera importante poner en juego unidades no convencionales, ya que se trata de estudiantes de 8º y 9º grado, y la mecanización del Sistema Métrico Decimal que éstos han tenido en años anteriores, no les permite ver otra cosa distinta a lo que ya se han "acostumbrado a hacer": multiplicar y dividir por 10, y no lograran ver la relación de unidades ni comprender el problema de la medida. Una vez validado este proceso, se puede poner otra vez en contexto de aprendizaje el sistema decimal de unidades.

5.4. Situación 4: Recorrido ciclístico

Nuevamente se propone a los estudiantes una situación relacionada con elementos de su entorno, en la cual el contexto social permite una motivación hacia los procesos de medición, selección y uso de unidades e instrumentos de medición, la conversión de unidades, el manejo de escalas y sistemas de medición, y por lo tanto la resolución de problemas y la necesidad de comunicar sus resultados.

Propósitos:

- Construir y utilizar escalas de medición.
- Uso de instrumentos de medida.
- Aproximación y estimación de una medida.
- Cálculo con unidades de medida.

- **ESTÁNDARES RELACIONADOS**

4º - 5º	**Pensamiento Métrico**
	Seleccionar unidades, tanto convencionales como ESTTÁNDARizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
	Pensamiento Numérico:
	Interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, razones y proporciones.
	Identificar, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.
	Resolver y formular problemas en los cuales se utilice la proporcionalidad directa y la inversa.
6º - 7º	**Pensamiento Métrico**
	Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.
	Resolver y formular problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).

	Pensamiento Espacial
	Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.
	Pensamiento Numérico:
	Utilizar números (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
8º - 9º	**Pensamiento Métrico**
	Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
	Pensamiento Numérico:
	Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.
	Utilizar la notación científica para representar cantidades y medidas.

Materiales:

Mapa de la ciudad de Medellín. (Ver anexo 8).[7]
Hoja de trabajo con las instrucciones para el alumno.
Regla y compás.

Descripción:

Se pide a los estudiantes que señalen un recorrido de una competencia ciclística de 175 Km, utilizando un mapa de la ciudad de Medellín (gráfico 16), para un circuito por las vías del centro y sus alrededores. Se sabe que entre las estaciones Alpujarra y Exposiciones, del Metro de Medellín, hay 287 metros, medidos desde el punto donde termina la plataforma Alpujarra y el punto donde inicia la plataforma Exposiciones.

Téngase en cuenta que:

- La competencia parte, en sentido norte – sur, del Centro comercial Camino Real en la Avenida Oriental; allí mismo es la llegada.
- Se debe respetar el sentido de las calles y carreras para la circulación de vehículos en situación normal.
- Las vueltas del recorrido deben ser las mismas, y no inferiores a 5.5 kilómetros, ni superiores de 6 km.

[7] Acá se ha colocado para esta situación un mapa de la ciudad de Medellín pero creemos que aquellos alumnos que no están familiarizados con la ciudad no tendrían muchas posibilidades de hacer un buen trabajo, por tanto recomendamos conseguir un mapa a escala de la zona urbana del municipio y reproducirlo para que la actividad sea más pertinente con el contexto de los alumnos.

Mapa de la ciudad de Medellín[8]

Inicialmente, se espera que los estudiantes, interpreten lo que se les pide, luego midan la distancia (en la hoja), entre las dos estaciones determinadas, además de conocer y explorar el mapa, midiendo y comparando. Allí el estudiante tendrá que identificar una escala a partir del hecho dado entre las distancias de las dos estaciones del metro, mencionadas en el problema. Esto es, que por 29 mm medidos sobre el mapa, se equivalen a 287 m reales, lo que lleva a plantear una correspondencia de 10 m reales por cada milímetro medido sobre el mapa, aproximadamente.

En esta situación cobra especial importancia la medida de tramos pequeños, en donde será muy relevante tomar el milímetro siguiente o el anterior en cada medición, lo que implica para el resultado que se tomen aproximadamente 10 metros en el recorrido.

La capacidad del alumno para estimar se pondrá en juego al tener que buscar recorridos no inferiores a 5.5 km ni superiores de 6 km. Ello dará al juego un mecanismo de validación en medio de la diversidad de posibilidades que permite. Se esperan vueltas muy cercanas a 5,8 Km y un número muy cercano a 30 vueltas. (Recordamos que los datos deben ajustarse a las condiciones del mapa que se proponga para la actividad).

[8] Cortesía Metro de Medellín Julio 2004.

Unidad No.6

La Magnitud Superficie

Jesús María Gutiérrez Mesa
Fabio N. Zapata

6.1. El área

6.1.1. El área en un contexto matemático y cognitivo

Recordemos, como ya se ha expresado antes que el Pensamiento Métrico implica, entre otros aspectos, el dominio de los conceptos de cada magnitud y sus medidas. Este dominio exige la comprensión de una serie de procesos que permiten abstraer*las de los fenómenos, para medirlas, para compararlas entre sí, operar con sus medidas y aplicarlas en diferentes contextos; utilizando como herramienta básica los sistemas de medidas".*

En particular la **Magnitud Área** y desde el punto de vista algebraico, como ya se trató para las magnitudes extensivas, ésta también se define como. "*un semigrupo conmutativo con elemento neutro y ordenado (M, +, ≤)"*. Además de que son importantes otras propiedades para su proceso de formalización como: la descomposición de un polígono, la congruencia y la equivalencia de polígonos.

OLMO y otros 1997, definen estas propiedades así:

La descomposición de un polígono: Si llamamos P un polígono decimos que se puede descomponer en P_1, P_2, P_3, $P_{4......}$ P_n, si P puede ser recompuesta a partir de P_1 U P_2 U P_3 U $P_{4...}$ UP_n, sin que queden espacios vacíos o sin que hayan regiones solapadas (superpuestas). y escribimos que $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 +_{......+} P_n$

La congruencia: Dos polígonos P_1 y P_2 son congruentes si tienen sus lados y sus ángulos respectivos congruentes o iguales. O también se dice que dos polígonos son congruentes si existe un movimiento en el plano que transforma uno en otro.

Equivalencia: dos polígonos decimos que son equivalentes si adjuntándoles a ambos un mismo polígono, no solapado con ellos, obtenemos figuras congruentes.

Así mismo, el concepto de **Magnitud Área** puede ser entendido cognitivamente como "la extensión de la superficie. O uno de los rasgos o características de los cuerpos que se mide cuantitativamente es el área o extensión". (GODINO. 2002, Pág.17), por tanto, una primera aproximación al concepto de área puede "*ser mediante procesos de recubrimiento, para luego introducir la idea de que ésta es un medio conveniente para expresar el tamaño de una región; es decir para expresar el número de unidades requeridas para cubrir una región plana".*

6.1.2. Enseñanza tradicional de la magnitud área.

Al igual que otras magnitudes, para el caso del área, su tratamiento tradicionalmente ha seguido una vía aritmética, en donde el trabajo con fórmulas y la conversión de unidades parecen ser la única vía que se presenta para la enseñanza de este pensamiento.

Éste enfoque (aritmético) se entiende como el cálculo de las medidas, que encierra tres aspectos:

- El primero donde la fórmula geométrica y las operaciones aritméticas son el único medio para hallar el área de las figuras planas.
- El segundo encierra el trabajo con unidades estándar[9] donde el único objetivo propuesto es que el alumno efectué conversiones entre las diferentes unidades con seguridad y rapidez.
- Y el Tercero es que el único contexto donde intervienen las magnitudes son las propiedades de los polígonos como el reconocimiento del ancho, largo, altura, hipotenusa, ángulos… para luego generalizar la medida indirecta del área, mediante cálculos que esconden el sentido de las magnitudes, sus unidades y el proceso mismo de la medición.

Para el primer aspecto el de las fórmulas geométricas, muchos libros de texto suelen empezar la unidad del pensamiento métrico bajo el presupuesto de que el área puede ser expresada como producto de longitudes. Luego muestran los diferentes polígonos y sus respectivas fórmulas que generaliza la medida indirecta de la magnitud área. Todo esto sin considerar que la medida del área es, por tanto mas compleja que el simple uso y manejo de formulas, sin un tratamiento de la unidad y de su conveniencia en términos de adecuación de ella a la superficie a medir. Se deben propiciar actividades que permitan una construcción "comprensiva "de las fórmulas y éstas como último paso. En este sentido las tareas de pavimentado de figuras con otras semejantes a ellas ayudan a su comprensión y a su significado.

El segundo aspecto (el trabajo con unidades estándar) los libros de texto y muchos docentes presentan las unidades estándar de medida a partir del patrón de medida el metro cuadrado, luego de esto se introducen las conversiones de unidades como se muestra en la tabla siguiente**.** En ella se presentan los principales múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado y sus equivalencias respecto a esta unidad básica.

Múltiplos y Submúltiplos del Metro Cuadrado

	Nombre	Símbolo	Valor en metros^2
Múltiplos	Kilómetro cuadrado	Km^2	$1.000.000=10^6$
	Hectómetro cuadrado	Hm^2	$10.000=10^4$
	Decámetro cuadrado	dam^2	$100=10^2$
Unidad Básica	**Metro cuadrado**	$\mathbf{m^2}$	$\mathbf{1=10^0}$
Submúltiplo	Decímetro cuadrado	dm^2	$0.01=10^{-2}$
	Centímetro cuadrado	cm^2	$0.0001=10^{-4}$
	Milímetro cuadrado	mm^2	$0.000001=10^{-6}$

[9] Las unidades estándar se entiende "como aquellas propuestas por el Sistema Métrico Decimal, que naturalmente es un sistema regular en el que los cambios se hacen según potencias de diez". (GODINO. 2002, Pág. 14,35)

Luego se pide a los estudiantes resolver ejercicios que requieran el uso memorístico de las unidades estándar.

Frente a este tratamiento (el trabajo con unidades estándar) que se le hace a las magnitudes y sus medidas conviene expresar que:

1. Si bien el Sistema Métrico Decimal ofrece una perfecta divisibilidad y, por tanto, gran facilidad para comparar, requiere también un cierto desarrollo del proceso mental del individuo que ha de ser preparado cuidadosamente. De ahí que un uso prematuro del sistema lleve aparejada la incomprensión del mismo.
2. *"En cuanto a los llamados múltiplos y submúltiplos de la unidad cabe decir que sólo tienen sentido para el alumno si éste siente la necesidad de su uso, aspecto imposible sino realiza actividades prácticas de medición que den lugar a comparar la unidad de medida con la cantidad a medir".* (CHAMORRO Y BELMONTE. 1994, Pág.43).

6.1.3. Una aproximación a la magnitud área

El proceso de la enseñanza de la magnitud área involucra una serie de conceptos y procesos previos para su aritmetización; su comprensión implica que en primer lugar se realicen una serie de trabajos o actividades prácticas de medición, donde el estudiante pueda observar las múltiples aplicaciones que tiene ésta en la cotidianidad y además que se presenten una serie de situaciones donde su uso resulte indispensable para la solución de problemas prácticos.

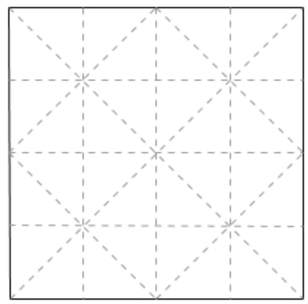
Según Maria Del Olmo y otros (1993), la formación del concepto de área viene dada por tres tipos de aproximaciones: Repartir Equitativamente, Comparar y Reproducir, y Medir.

- **La primera aproximación (Repartir Equitativamente):**

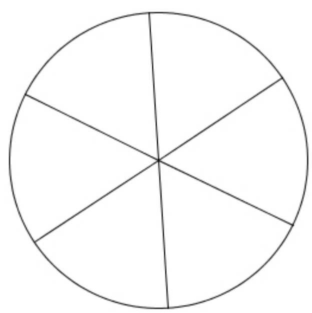
  Incluye aquellas situaciones en las que se debe repartir un objeto dado, por ejemplo una torta circular o rectangular, un determinado número de baldosas o una cantidad entre otras. Este tipo de aproximación esta estrechamente relacionada con el concepto de fracción, ya tratado en el Módulo de Pensamiento Numérico y en la relación parte todo. Acá la fracción se utiliza como medidora de la magnitud área, o como dice al respecto Múnera (1998) que "*las fracciones, como subáreas de una región unitaria, además de posibilitar la comprensión de la relación parte todo de una forma mas natural, también conducen a la noción de medición*". (Pág. 28) y de esta forma presentar situaciones concretas que impliquen el uso de repartos equitativos de áreas, puede no sólo dotar de significado al concepto de área, sino también al . de fracción.

  Dentro de esta aproximación al concepto de área se pueden considerar, asociado a este, otros tres tipos de procesos que tienen que ver con las regularidades, la estimación y la medida.

  - *Mediante regularidades* consiste el descubrir simetrías de los objetos que se desean repartir, por ejemplo una hoja se puede partir en partes iguales siguiendo determinados ejes de simetría: las diagonales o dobleces a los puntos medios de los lados y en forma recurrente como se muestra en la figura siguiente. En el origami[10] es muy empleado este tipo de reparticiones.



- Por *estimación:* Dado que la unidad de área no es distinguible individualmente, (se trata de una magnitud continua) entonces los repartos, por ejemplo de una torta en partes iguales, tienen una precisión de carácter aproximativo como lo señala (M.E.N. 1998, Pág. 64)



- Por *medida:* Es quizá la más usual y "consiste en medir la cantidad a repartir, dividir el resultado de esa medida entre el número de partes que se desea, y medir cada una de ellas.

- **La segunda aproximación (Comparar y Reproducir):**

  Es un poco más compleja que la anterior, incluye situaciones en las que se deben comparar dos superficies con formas diferentes (por ejemplo dibujar un cuadrado que tenga igual área que un círculo).Estas situaciones pueden ser resueltas mediante cinco procesos: Por inclusión, Por transformaciones de romper y rehacer, Por estimación, Por medida, Por medio de funciones.

  - Por *inclusión* donde la comparación es directa pues exige que una superficie esté contenida en otra de área mayor, por ejemplo cuando se está borrando el tablero el área del borrador es menor que la del tablero.

[10] El origami es un arte tan antiguo como el papel mismo este consiste en doblar el papel de modo que se obtenga una figura especialmente detallada y estética.

- Por *transformaciones de romper y rehacer* que "*consiste en descomponer una superficie en diversas partes y reorganizarlas posteriormente obteniendo superficies diferentes que tienen la misma área"* (OLMO y otros. 1993, Pág.19), un ejemplo clásico son las múltiples aplicaciones del tangram[11] y los rompecabezas, además . *proporcionan buenas oportunidades para investigar los conceptos de tamaño y forma* (GODINO. 2002, Pág. 71)

- Por *estimación*, proceso en el que para comparar hay pensar en un área que no está presente, por ejemplo cuando se compara el área de una casa con otra, o cuando se compra una alfombra que se cree va a cubrir determinada superficie.

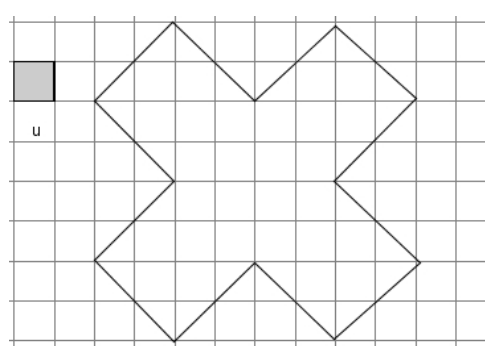
- Por *medida,* consiste en utilizar procesos de pavimentado o instrumentos de medición para dar con exactitud la medida. Por ejemplo cuando se comparan dos superficies lo más común es que se midan entre ellas para dar una medida mas aproximada; *también se puede aplicar para obtener copias de otra superficie.*

- Por *medio de funciones*, proceso que consiste en reconocer la representación de una función, en la cual, el área esta en relación directamente proporcional con una o dos variables (largo, ancho, alto, apotema, etc.) Éste proceso a su vez incluye la aplicación de las fórmulas. Como por ejemplo se aplica en situaciones en las que las superficies se representan con fórmulas y para ser comparadas o para obtener una reproducción se recurre a funciones que conserven el área.

- **La tercera aproximación (Medir):**

  Incluye situaciones en las que *la superficie aparece ligada a un proceso de medida, ya sea para comparar, repartir o valorar. Según Olmo (*1993) Su realización puede efectuarse por medio de cuatro formas:

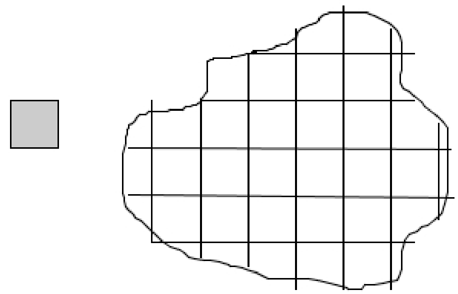
- Por *exhausción* con unidades; es decir donde se recubra una superficie con unidades de medida, y en aquellas partes de la superficie donde no quepan se recurre a rellenar con unidades de área inferior a la primera.



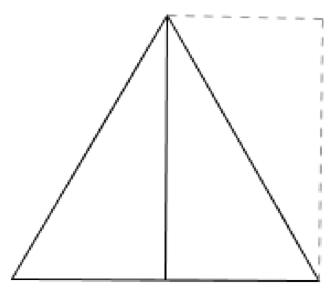
Cuantas veces cabe el cuadrado U en la figura?

[11] El tangram es un rompecabezas constituido por siete piezas geométricas que se juntan para formar un cuadrado, un triangulo, un rectángulo un pentágono…

- Por *acotación entre un valor superior e inferior,* esta forma de estimación "*consiste en aproximar la superficie desde su interior por ejemplo cuando se superpone una rejilla a la superficie que se desea medir y contar el numero de unidades que son totalmente interiores a la superficie".*



- Por *transformaciones de romper y rehacer;* en aquellas situaciones donde se debe descomponer una superficie dada en otras superficies para poder hallar su medida, por ejemplo *"para calcular el área de un triangulo equilátero se puede descomponer por una de sus alturas en dos triángulos rectángulos y unir éstos por su hipotenusa obteniendo un rectángulo"*.



- Por medio de *relaciones geométricas.* Este procedimiento consiste en la obtención de un área por medio de fórmulas, midiendo, en primer lugar, las dimensiones lineales de la superficie calculada.

Cada una de estas aproximaciones al concepto de área se relaciona con una serie de procesos que permiten construir y manejar la magnitud área en todos los contextos donde ésta aparezca. Estos procesos son: percepción, comparación, medida y estimación; éstos están relacionados transversalmente

6.1.3.1. Percepción

En general la percepción de magnitudes se hace a partir de los sentidos, de la idea inicial que se tiene con el proceso de medida de éstas o en palabras de Chamorro y Belmonte (1994) *la medida perceptiva se hace a partir de impresiones sensoriales. E*ste proceso es de vital importancia pues desde allí el estudiante construye la medida del objeto

De este modo, la percepción de áreas es el primer nivel de tratamiento para la enseñanza de la magnitud área. Esta suele presentarse en situaciones comunes, como cuando el albañil debe recubrir o pavimentar la superficie de una casa, un patio, o una acera con baldosas (cuadradas, rectangulares, hexagonales…). Según Godino (2002) en este sentido "*la percepción del área se puede desarrollar a partir de la idea primitiva del recubrimiento de objetos". Por tanto* en este sentido una vía de enseñanza para aproximarse a este proceso perceptivo del área puede ser el trabajo con unidades no estándar[12] donde el estudiante pueda recubrir superficies intentando hacer medidas aproximativas, e ir introduciendo la idea de subdivisión de una región en partes. Proceso que Olmo y otros (1993) llama *subdivisión.*

En síntesis, una de las primeras aproximaciones que se deben hacer para el proceso de medición de superficies, es *"la presentación de actividades que conlleven a la noción de recubrimiento por repetición de una unidad, para luego realizar otro tipo de situaciones que permitan captar la naturaleza continua y aproximativa de la medida".* (M.E.N. 1998, Pág. 65)

6.1.3.2. Comparación

El proceso de comparación de la magnitud área implica establecer diferencias y semejanzas sobre el tamaño de las superficies, directamente por procesos de medición o indirectamente a través de la estimación o el uso de fórmulas, sobre este proceso se pueden citar una serie de ejemplos:

- La cancha de fútbol es más "grande" que la de baloncesto.
- ¿Cuántos metros cuadrados de tela se necesitan para cubrir una ventana?.
- ¿Qué parte de área del terreno total de una finca, es la casa ¿
- ¿Que tipo de baldosín y de que área es más conveniente para recubrir el baño de una casa?.

En este sentido el procedimiento mas común de comparación para cualquier magnitud según Chamorro y Belmonte (1994)

> *"Es hacerlo directamente con dos objetos en cuestión, bien usando los sentidos especialmente la mirada, como en el estadio mas primitivo de la estimación sensorial, o bien mediante un desplazamiento de los objetos. En el caso de la superficie se procede superponiendo ambas, o bien, pavimentando una de ellas con la otra".* (Pág.57-58)

Según Cavallieri (citado por Olmo (1993)) específicamente para la enseñanza de las áreas de los polígonos, existen unos procesos bajo los cuales se puede establecer comparaciones respecto a:

---

[12] Las **Unidades no Estándar** son aquellas con las que se puede medir bajo un sistema regular de unidades, pero no permiten comunicar los resultados de las medidas en cualquier lugar. Como ejemplo de estas unidades *"se pueden citar piezas pequeñas de papel o madera (cada una debe pertenecer a un conjunto de piezas congruentes) en varias formas (triángulos, rectángulos, cuadrados, hexágonos…) pequeños baldosines de cerámica o madera, carpetas cuadradas…"* (OLMO y otros 1993 Pág. 66)

> "*Directamente, si una es parte de la otra.*
> *Indirectamente, después de transformaciones de romper y rehacer; congruencias y otras transformaciones que conservan el área, medir".* (Pág. 58)

Este proceso (comparación) es mucho más complejo que el anterior (percepción) pues según Godino (2003):

> "*implica la forma que no está por ejemplo para el caso de las longitudes… Es el caso de un rectángulo muy alargado y estrecho, éste puede tener menos área que un triángulo con lados mas pequeños. Esto resulta particularmente difícil para los alumnos de menor edad, como también que el área se conserve cuando las diversas partes de una figura plana se recomponen para formar otra figura diferente.* (Pág. 70)

De esta forma el proceso de comparar áreas comprende "*las transformaciones que, ejercidas sobre un objeto dejan su área invariante*". (OLMO y Otros. 1992) En este caso es importante citar las transformaciones de romper y rehacer, quitar cortando.

Según Olmo y otros (1993) la técnica de romper y rehacer, es muy útil para establecer comparaciones, pues con ella se indaga por los conceptos de tamaño y forma. El tangram es un ejemplo clásico de este tipo de transformaciones, pues con este material como ya se ha mencionado se pueden construir una quince mil figuras con áreas equivalentes.

Este tipo de proceso es importante para la enseñanza de la magnitud área por que a partir de actividades que involucren la comparación "*el estudiante puede discriminar entre el tamaño (área) y la forma, longitud y otras dimensiones*". (Godino. 2002, Pág. 70)

Todas las actividades de comparación exigen establecer relaciones más que, menos que, para ello se utilizan variantes especificas de comparación como: *Alto-largo-estrecho*, *ancho-bajo-corto,* cuando . por ejemplo se afirma que: *este jarrón es más ancho que el de allá, esta mesa es más grande que la de mi casa.*

6.1.3.3. Medida

El proceso de medir es el eje regulador de la construcción, manejo y comprensión de las magnitudes. En este sentido es fundamental en el contexto escolar cuidar el trabajo con las medidas pues como afirman Olmo y otros (1993) "*la medición aporta situaciones reales para ejercitar el cálculo a la vez que lo conecta a la vida real y los prepara para enfrentarse con éxito a determinadas profesiones y a la vida diaria".*

Este proceso implica según Godino (2002) "*seleccionar una unidad de medida apropiada, y fijar un procedimiento para cubrir o llenar la cantidad que se desea medir mediante una colección de unidades y expresar la medida mediante el número de unidades usadas*". (Pág.54)

Específicamente para la medición de superficies como antesala para la selección de unidades de medida, se utiliza el pavimentado, partiendo de tres unidades básicas como lo es el triángulo, el cuadrado y el hexágono[13], a partir de estas figuras planas básicas se pueden obtener teselados[14]. Es precisamente como desde el pavimentado de figuras se empieza a construir la comprensión y el significado de las fórmulas, pues facilita el paso de estructuras aditivas a estructuras multiplicativos, es el caso de los cuadrados, el alumno inicia contando la unidades cuadradas que lo recubren, pero tras reiteradas mediciones va descubriendo que al multiplicar el largo por el ancho obtiene de una forma mas resumida el área del objeto a medir.

Según Olmo y otros (1993) "*el principal interés del acto de medir; es mostrar el proceso. Se deben plantear situaciones donde se precise la búsqueda de un intermediario para poder comparar figuras".* Para este fin las actividades de pavimentado son la mejor vía para las tareas de aritmetización como ya se ha mencionado.

Dentro de la investigación propuesta sobre la magnitud área (ZAPATA, Fabio y otros. Situaciones problema para la enseñanza de la magnitud área. Universidad de Antioquia 2006). Se pudo concluir que el mejor camino para iniciar con los procesos de mediciones es a partir de unidades no estándar pues son mas asequibles y permiten facilitar el acercamiento a la naturaleza continua y aproximativa de la medida, además "*ayudan al niño a relacionar el proceso de medida con el medio … que le rodea".* (OLMO y Otros. 1992) Luego de esto se pueden construir procesos de medición con unidades estándar pues ya se ha creado la necesidad de utilizarlas y aplicarlas, por ultimo se pueden emplear situaciones que involucren la estimación de áreas para construir niveles de medición mas complejos donde el alumno pueda tomar decisiones sobre el rango y orden de las unidades.

6.1.3.4. Estimación

El proceso de estimar es de vital importancia pues permite acceder a complejas técnicas de medición, "*ayudando no solo a reforzar la comprensión de los atributos y el proceso de medición sino a la adquisición de la conciencia del tamaño de las unidades".* (M.E.N.1998, Pág.67)

Desde aquí es como la estimación debe jugar un papel importante en la escuela donde una de las aplicaciones mas importantes que tiene, es la de usarse después de haber usado el sistema legal, debido a que es *"indispensable para la vida corriente, dar medidas aproximadas sin utilizar instrumentos de medida".* (CHAMORRO y BELMONTE.1994, Pág. 72)

Específicamente para la magnitud área la estimación involucra conceptos y habilidades tales como:

- *"Una comprensión de la cualidad (área) que se va a medir.*
- *Una imagen mental de la unidad que se va usar en la estimación.*

[13] Para recubrir el plano, la suma de los ángulos que confluyen en un vértice ha de ser 360 grados. Por tanto, para poder pavimentar el plano con un solo tipo de polígonos regulares la medida de los ángulos interiores de éstos debe ser un divisor de 360 grados. Así los únicos polígonos regulares que recubren el plano son triángulo, el cuadrado y el hexágono.

[14] Los teselados son los diseños de figuras geométricas que por sí mismas o en combinación cubren una superficie plana sin dejar huecos ni superponerse, o sea, el cubrimiento del plano con figuras yuxtapuestas.

- *La comprensión del concepto de unidad.*
- *La habilidad de comparar objetos según el atributo que se va a medir.*
- *La habilidad de realizar iteración de la unidad.*
- *La habilidad de seleccionar y usar estrategias de estimación.*
- *Habilidad de verificar la adecuación de la estimación".* (OLMO y Otros. 1992, Pág. 89)

Esto demuestra la complejidad de este proceso de medición pues requiere de una serie de acondicionamientos que llevan a la habilidad de medir a simple vista una determinada cualidad medible de un objeto.

Estimar áreas involucra no sólo una serie de habilidades y conceptos sino que además requiere de una serie de estrategias que la hacen apropiada para su estimación. Estas estrategias son:

- **Adición repetida**: usando la iteración de la unidad para estimar el área de un polígono. Este método lo utilizan más los sujetos que están adquiriendo el concepto de área, pero que no están en el nivel de las operaciones formales para usar la multiplicación al determinar el área.
- **Longitud por anchura:** usando estrategias de longitud para estimar las dimensiones de una región poligonal y aplicando una fórmula para obtener el área. Esta estrategia es difícil si el número de lados es mayor que cuatro. Con frecuencia, las fórmulas se olvidan o se aplican mal.
- **Reestructuración:** efectuar un arreglo, transformación de romper y rehacer en el objeto para obtener otro cuya área se determine más fácilmente.

En síntesis el proceso de estimación es fundamental para desarrollar procesos de complejos de medición pues permiten no sólo preparar a los estudiantes para resolver problemas que involucren mediciones aproximadas como las que se hacen en los laboratorios de química (con las pipetas) o en situaciones donde se pregunta por cuánta pintura se necesita para cubrir una pared o una pieza, o cuántas baldosas se necesitan para embaldosar una casa, o qué parte de terreno se necesita para cultivar, o cuándo hacemos la pregunta por una prenda de vestir donde se tiene la duda de que ésta si vaya a servir.

6.2. Unidades de Área

Recordemos que la unidad de media es un concepto abstracto que materializamos en objetos que poseen no sólo la cualidad (magnitud), sino que además nos sirven de intermediarios para compararlos consigo mismos, con otros objetos para determinar su medida o entre otros dos objetos o mas con el fin de determinar su diferencia o igualdad.

Para el caso del área, uno de los métodos más recomendados no sólo en su percepción, sino también en su medida, es el de recubrimientos y para lo cual la unidad de medida tiene que ser tal que al replicarla, sobreponerla sobre la superficie a medir, ésta no deja espacios sin cubrir (huecos) y tampoco solapamientos o partes superpuestas.

SITUACIÓN:

- **ESTÁNDARES**

1º a 3º	Reconocer atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie) en diversas situaciones
4º a 5º	Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa- peso, tiempo y amplitud angular) en diversas situaciones.
6º a 7º	Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
	Calcular áreas y volúmenes a través de recomposición y descomposición de figuras y cuerpos.
8º a 9º	Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.
	Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
	Justificar la pertinencia de utilizar unidades de medida específicas en las ciencias.

Material: Cuadrados de cartulina (5 o 10 cm de lado). Triángulos rectángulos isósceles que sean la mitad de la superficie de un cuadrado. Triángulos equiláteros de igual lado que los cuadrados. Hexágonos de lado igual al cuadrado y a los triángulos. Pentágonos.

Descripción:

Se pide a los alumnos que corten en cartulina dos figuras de cada una de las descritas anteriormente.

Actividad 1:

1. Recubre una parte del piso con los cuadrados sin que queden huecos (espacios) ni se superpongan las figuras. Fija la figuras con cinta de enmascarar para que no se muevan.
2. Realiza en varios espacios la misma actividad con: los triángulos equiláteros solamente. los hexágonos solamente. los pentágonos solamente.
3. Con todas las figuras se puede realizar la tarea? Con cual no? Puedes dar una razón para ello?

Análisis previo:

Téngase en cuenta que la actividad permite realizar teselados o recubrimientos regulares siempre y cuando cumplan la condición descrita anteriormente: que la suma de los ángulos interiores del polígono regular sea un divisor entero de 360 grados, como ilustra la tabla siguiente:

	Triángulo	Cuadrado	Pentágono	Hexágono
Medida ángulo interior	60º	90º	108º	120º

Es importante que se discuta el hecho que el pentágono no permite realizar la actividad pues permite poner un contraejemplo y obligar a los alumnos de construir una argumentación válida que lleve al descubrimiento del principio ya enunciado. Implicará movilizar otros procedimientos que están relacionados con las propiedades de los polígonos utilizados. Y Además como dice Olmo Y otros (1992, p.64) "como un paso previo a la elección de unidad de medida".

Actividad 2:

Ahora intenta recubrir una parte de la superficie del piso utilizando todas las figuras en forma combinada.

Todas permiten hacer la tarea? Cuales no se pueden combinar? Por qué?

Análisis previo:

Esta situación avanza en la misma dirección de la anterior pero extendiendo el procedimiento a teselados o recubrimientos semiregulares bajo la condición que la suma de los ángulos interiores de las figuras que confluyen en un mismo vértice es siempre 360 grados.

Actividad 3:

La actividad puede desarrollarse en el piso y por grupos (fuera o dentro del aula), para lo cual se señala o marca una superficie, (rectangular preferiblemente), a cada grupo con cinta de enmascarar (previamente) teniendo cuidado que los lados sean conmensurables con los lados de las figuras y de acuerdo con el número de figuras que cada grupo tendrá.

Se debe discutir con los alumnos sobre la base de la experiencia anterior, cuáles de las figuras tomadas para recubrir el rectángulo permite tomarse como más apropiada para expresar la medida.

De allí debe surgir la idea de que el cuadrado tomado como unidad de medida es el más apropiado para teselar y medir las superficies regulares. Sin embargo cualesquiera de las otras figuras podría tomarse como unidad de medida.

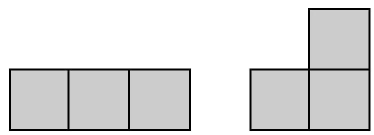
Otro tipo de actividades que se pueden proponer para iniciar la conceptualización de las unidades de medida y la medida de superficies por recubrimiento, se puede proponer a partir de los poliominós[15]: Un grupo de cuadrados unidos por los lados, de tal forma que cada dos de ellos tienen al menos un lado común. Se clasifican en:

[15] La historia de los poliominós comenzó hacia 1954 cuando el matemático norteamericano Salomón W.Goulomb publicó su artículo "checker borrad and polyominóes" (tableros de damas y poliominós). Más adelante Martín Gardner publicó varios artículos destacando las posibilidades con los poliominós.

Uniminós: formado por un solo cuadrado. Sólo existe uno.
Dominós: formado por dos cuadrados. Sólo existe uno.

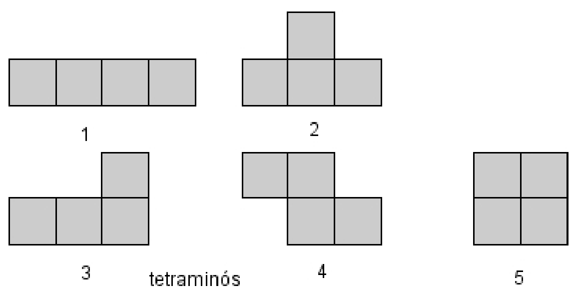
uniminó dominó

Triminós: formados por tres cuadrados:



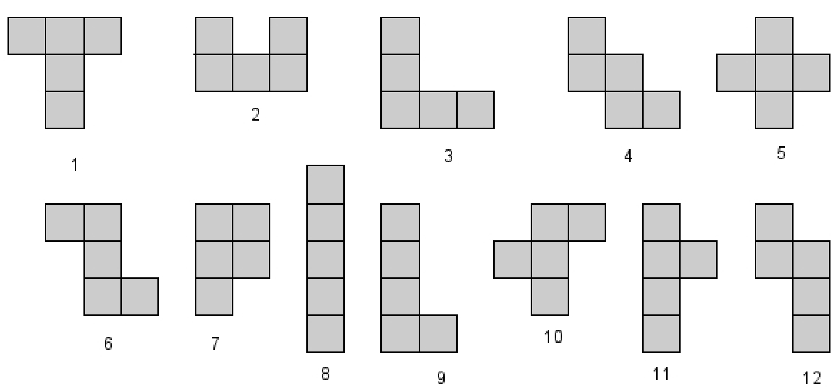
triminós

Tetraminós: formados por cuatro cuadrados.



tetraminós

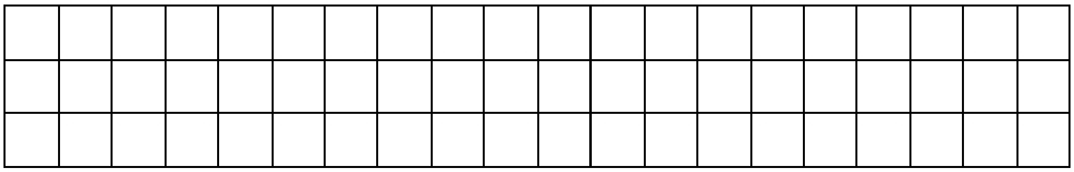
Pentaminós formados por cinco cuadrados.



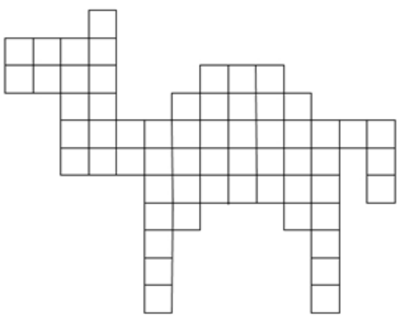
Pentaminós

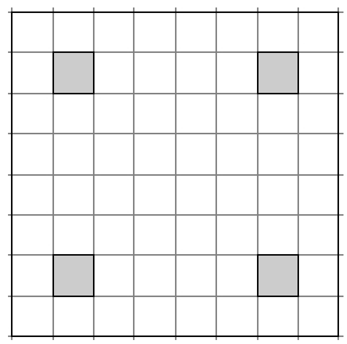
Actividad 4:

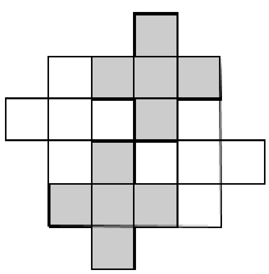
1. Recubrir el siguiente rectángulo con los pentominós:

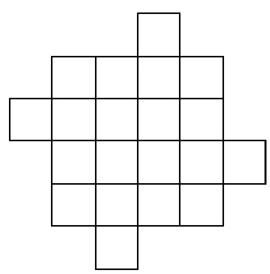


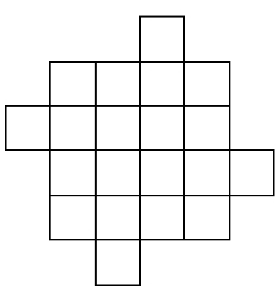
2. Construye todos los rectángulos que encuentres de área igual a la anterior:
3. Recúbrelos con los pentominós.
4. Encuentra una forma de recubrirlos con los pentominós.

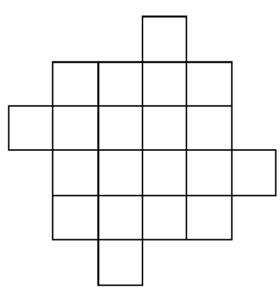




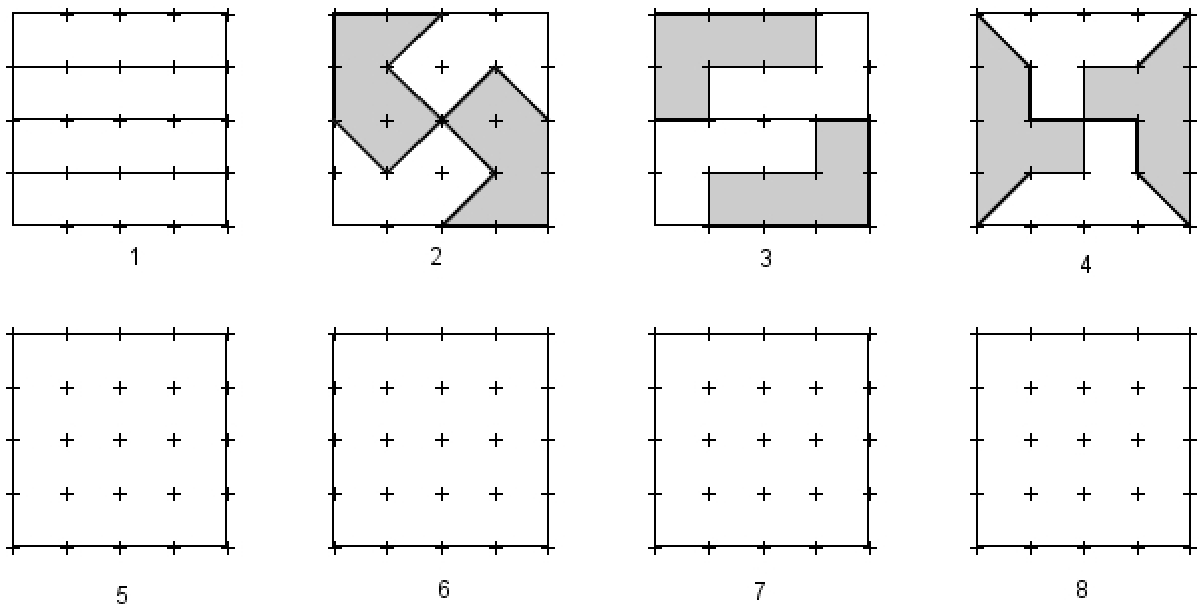








Dados los siguientes cuadrados divídanse en cuatro regiones congruentes y de formas diferentes.



6.2. Formalización de la medida del área de superficies regulares

SITUACIÓN: Medida de área

- **ESTÁNDARES**

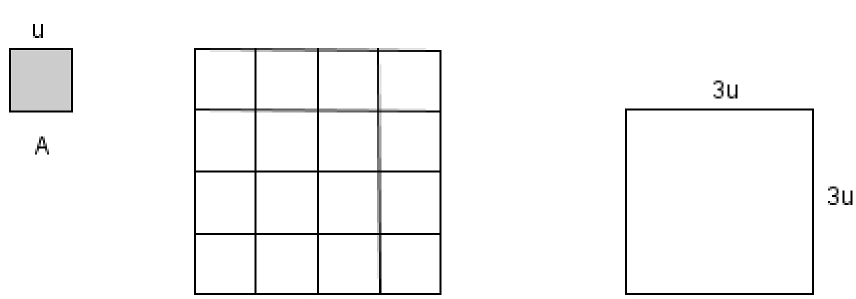
1º a 3º	Reconocer atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, capacidad, masa y tiempo) en diversas situaciones.
	Comparar y ordenar objetos respecto a atributos mensurables.
	Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados de acuerdo con el contexto.
	Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.
	Utilizar y justificar el uso de estimaciones de medidas en la resolución de problemas relativos a la vida social, económica y a las ciencias.
	Reconocer el uso de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas.
4º a 5º	Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie) en diversas situaciones.
	Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.

	Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes.
	Calcular el área y volumen de figuras geométricas utilizando dos o más procedimientos equivalentes.
	Reconocer el uso de las magnitudes y las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas.
6º a 7º	Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
	Calcular áreas y volúmenes a través de recomposición y descomposición de figuras y cuerpos.
	Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.
8º a 9º	Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.
	Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

Las actividades que se proponen a continuación buscan una aproximación al cálculo de áreas partiendo de procesos de medida. Lo que implica el reconocimiento de la unidad que permite recubrir completamente la superficie a medir. De allí que en las actividades se coloca la unidad con la cual se ha de medir la superficie, un cuadrado, de lado 1U que equivale a un área de $1U^2$. En la figura siguiente para el caso del cuadrado 1 el área se obtiene por iteración de la unidad sobre la superficie. En el caso del cuadrado dos se espera que ya el resultado se obtenga mediante el cálculo de multiplicar el lado del cuadrado que mide tres veces el lado del cuadrado A que es tomado como unidad de medida. En este segundo caso 3u que es el lado del cuadrado 2 es medido con el lado U del cuadrado A. Téngase en cuenta esta última observación ya que lo que mide el lado del cuadrado no es la unidad A, sino su lado.

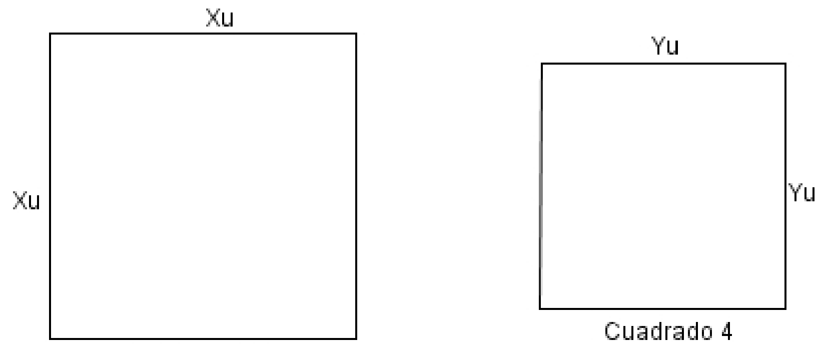
Actividad

Determinar el área de las siguientes figuras.



Cuadrado 1

cuadrado 2



Cuadrado 3

Cuadrado 4

Para el caso de los cuadrado 3 y 4 se pretende que el alumno generalice el procedimiento y encuentre la expresión aritmética o algebraica que represente la situación. Téngase en cuenta que X veces u o Y veces u la medida de los lados con el lado de la unidad cuadrada que tiene de lado U y X, Y son números enteros o racionales según U mida exactamente o no el lado del cuadrado. Aquí es importante tener en cuenta que el producto no es sólo entre las cantidades, sino también el de las unidades que permite ver el cambio de dimensión en las medidas que se expresan: $(X{\cdot}u)(X{\cdot}u)=X^2u^2$ para el caso del cuadrado tres y $(Y{\cdot}u)(Y{\cdot}u)=Y^2u^2$. Y por tanto para cualquier cuadrado de lado L veces *u, el área correspondiente se podrá representar como* $(L{\cdot}u)(L{\cdot}u)=L^2u^2$.

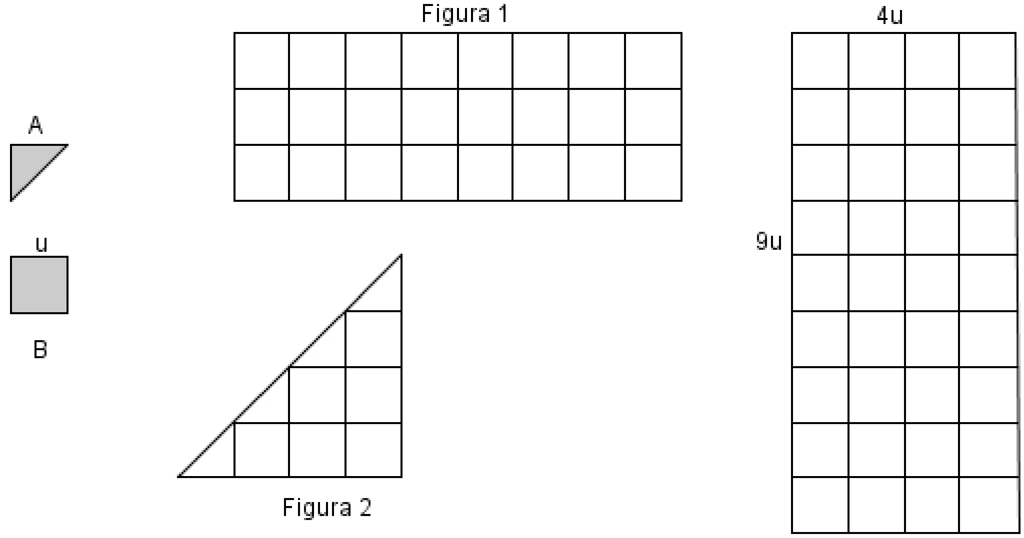


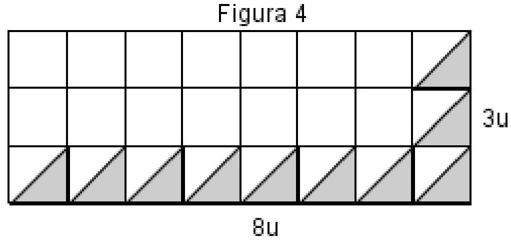
Figura 1

Figura 2

Figura 3

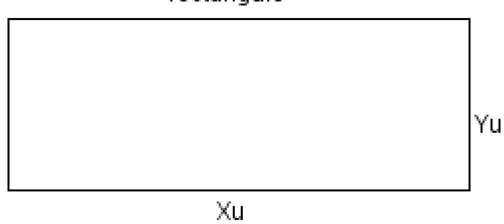
En un sentido similar se discute la situación anterior con el caso de los rectángulos (figura 1 y figura 3) donde el área se determina contando el número de filas y el número de columnas, que se forman iterando la unidad B, que corresponde con $1U^2$: tres filas de 8 unidades cuadradas (figura 1) u 8 filas de 3 unidades cuadradas o para el caso de la figuras 2: 4 filas de 9 unidades cuadradas o 9 filas de 4 unidades cuadradas. Téngase en cuenta que esta presentación podría resolverse mediante un proceso de carácter aditivo o multiplicativo y se podría representar el área como: $3{\cdot}8u^2 = 24u^2$ ó $8u^2 + 8u^2 + 8u^2 = 24u^2$ para el caso de la figura 1. En el caso de la figura 3 se puede recurrir a una representación de carácter multiplicativo en donde se multiplican las medidas de los lados del rectángulo $(9u){\cdot}(4u)=36u^2$. Allí se coloca otra unidad de medida A, que permitiría recubrir los rectángulos y expresar su medida en términos de ella, pero . no nos permite hacer los cálculos en los mismos términos a como procedimos con la unidad B y tendríamos que recurrir a una equivalencia entre la unidad A y la unidad B para realizar los procedimientos. Se puede comparar y discutir el caso de la figura 2 si se mide con la unidad A.

Figura 4



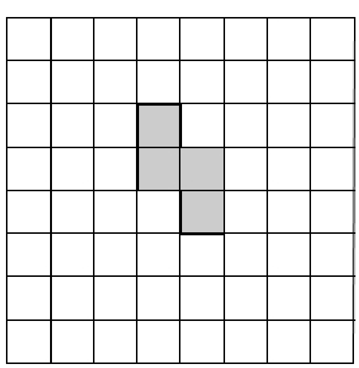
Se puede entrar a generalizar a partir de una serie de situaciones como las anteriores que el área de un rectángulo se puede representar mediante la expresión $(X{\cdot}u)(Y{\cdot}u) = (X{\cdot}Y)u^2$ donde $X{\cdot}u$ y $Y{\cdot}u$ son la base y la altura respectivamente o el largo y acho del rectángulo.

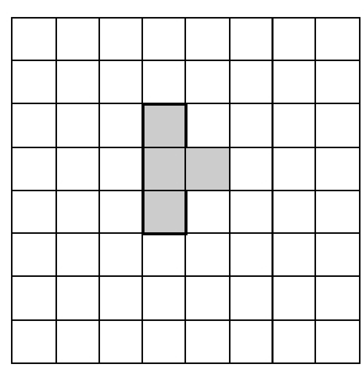
rectángulo

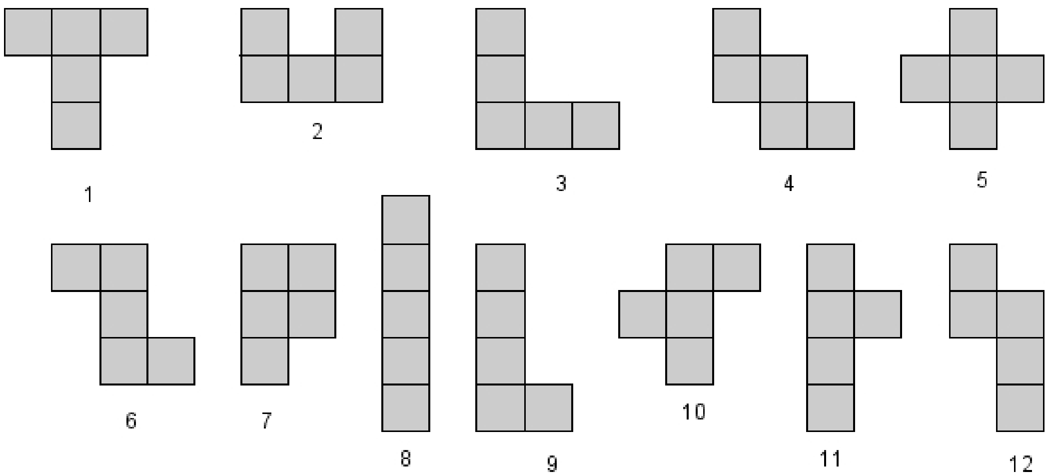


Actividad:

En los cuadrados y en el área sin sombrear pinta con colores diferentes 12 áreas de 5 U^2 y correspondan con los doce pentaminós.







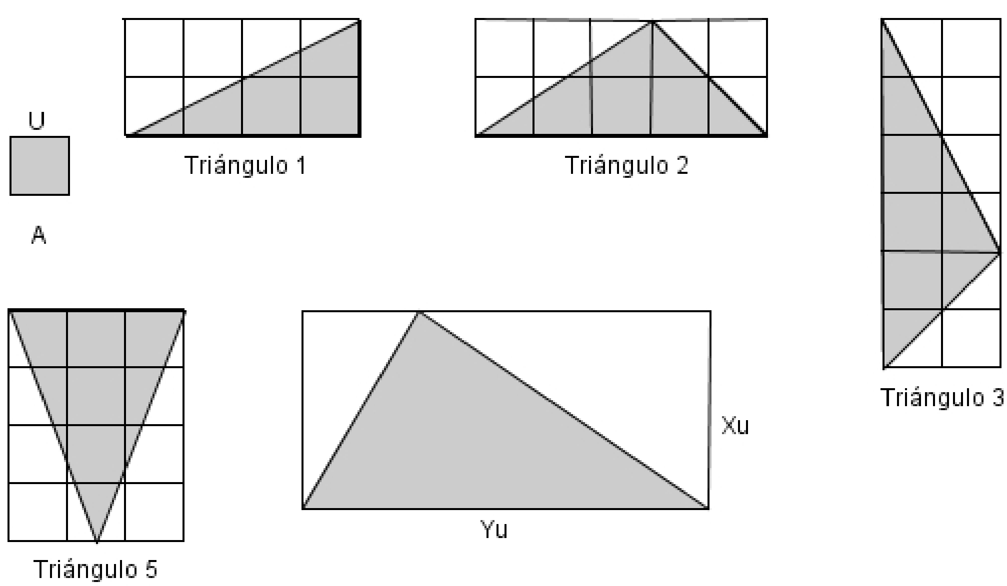
Pentaminós

Actividad: Medida de áreas

Medir el área sombreada en cada caso, dada la unidad A = 1U², de lado U. En esta presentación de las figuras se colocan las áreas sombreadas, triángulos, sobre rectángulos para avanzar y aprovechar el caso ya tratado en la actividad anterior para deducir que las áreas de los triángulos son iguales a la mitad del área del rectángulo que tiene igual base e igual altura, es decir dado un triángulo de base *Y. u* y altura *X. u*, su área corresponde a la mitad de un rectángulo que tenga por base también *Y. u* y altura *X. u, es decir:*

$$(X\cdot u)(y\cdot u)=\frac{1}{2}(Y\cdot X)u^2$$

OJO AL QUEMAR PLANCHA FORMULA SE MUEVE



Actividad:

Determina el área de cada uno de los siguientes triángulos de la figura 1: coloca la información en la tabla 1

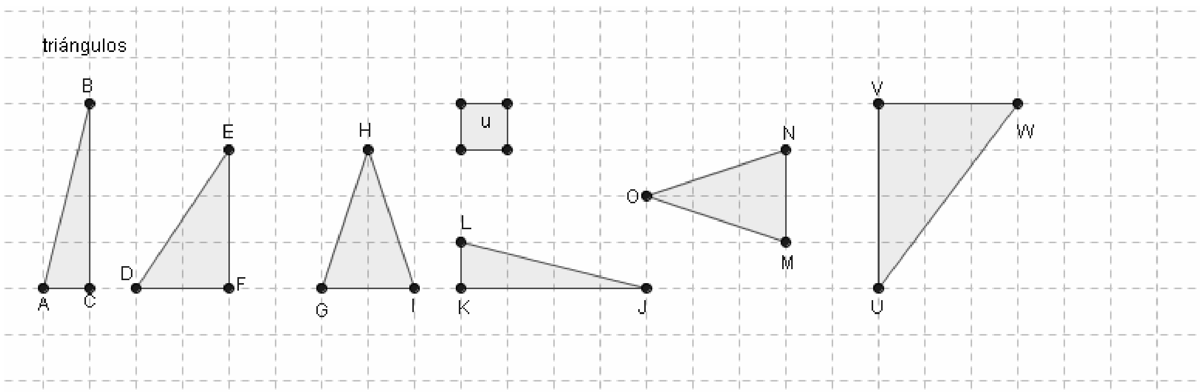


Tabla 1.

Nombre triángulo	Expresión del área	Valor área	Nombre triángulo	Expresión del área	Valor área
ABC	(AC) (BC)/2	$(1u)(4u)=4u^2$			

Coloca el área de los triángulos de la figura 2 en la tabla 2.

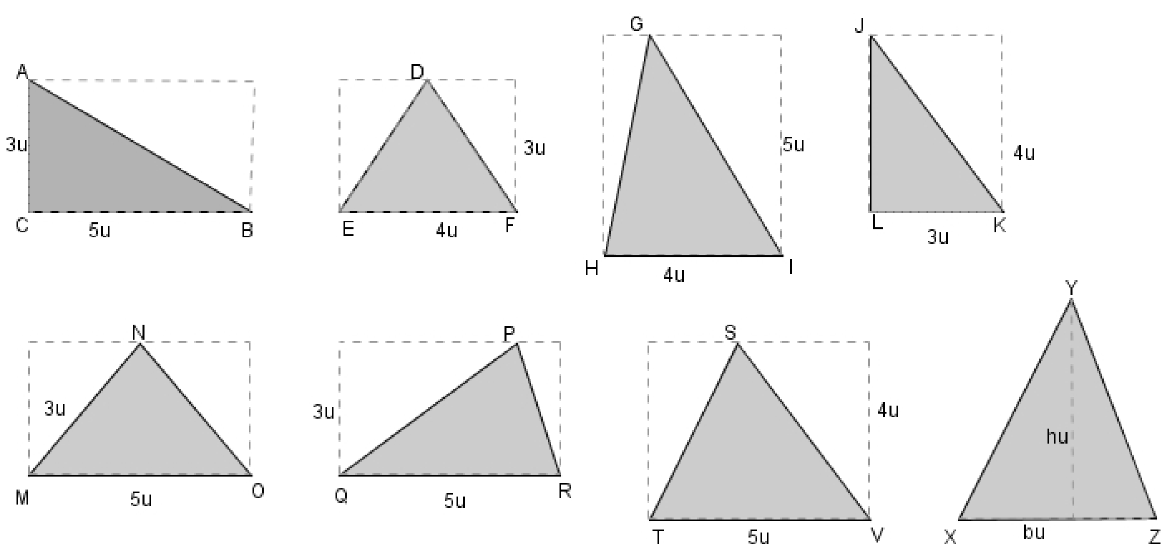
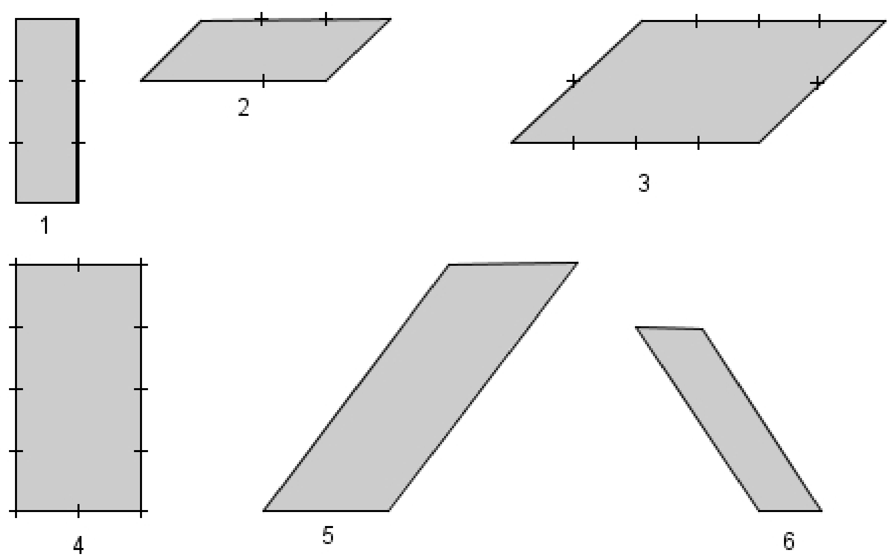


Tabla 2.

Nombre triángulo	Expresión del área	Valor área	Nombre triángulo	Expresión del área	Valor área
ABC	(AC) (BC)/2	$(3u)(5u)=15u^2$			

Actividad : Comparando figuras.

¿Cuáles de las siguientes figuras tienen igual área?



PARALELOGRAMOS

En esta actividad se han quitado algunas ayudas en términos de dar los rectángulos directamente superpuestos con cada paralelogramo (los rectángulos también son paralelogramos) que se le pueden asociar a cada figura, ello implicará que los alumnos desarrollen sus propias estrategias para compararlas y descubrir esta relación que permite generalizar que dado un paralelogramo cualquiera, su área es equivalente a la de un rectángulo que tenga igual base e igual altura. También es importante variar las posiciones a fin de evitar que la conceptualización quede fijada a la posición de la figura y a una sola configuración sin que deje ver el sentido del procedimiento , como se señala en el caso del famoso paralelogramo de Wertheimer[16].

[16] Se puede consultar en: Lauren Resnick y W. Ford, La enseñanza de las Matemáticas y sus procesos sicológicos. P.163.

SITUACIÓN: Cálculo de áreas

- **ESTÁNDARES**

1º a 3º	Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos Estandarizados de acuerdo con el contexto.
	A analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.
	Reconocer el uso de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas.
4º a 5º	Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa- peso, tiempo y amplitud angular) en diversas situaciones.
	Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
	Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes.
	Calcular el área y volumen de figuras geométricas utilizando dos o más procedimientos equivalentes.
	Reconocer el uso de las magnitudes y las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas.
6º a 7º	Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
	Calcular áreas y volúmenes a través de recomposición y descomposición de figuras y cuerpos.
8º a 9º	Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.
	Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

La siguiente tabla debe ser llenada con base en la información suministrada en la figura 2: en donde U es 1 unidad cuadrada, Z equivale a ½ de U^2 y X equivale a $2U^2$

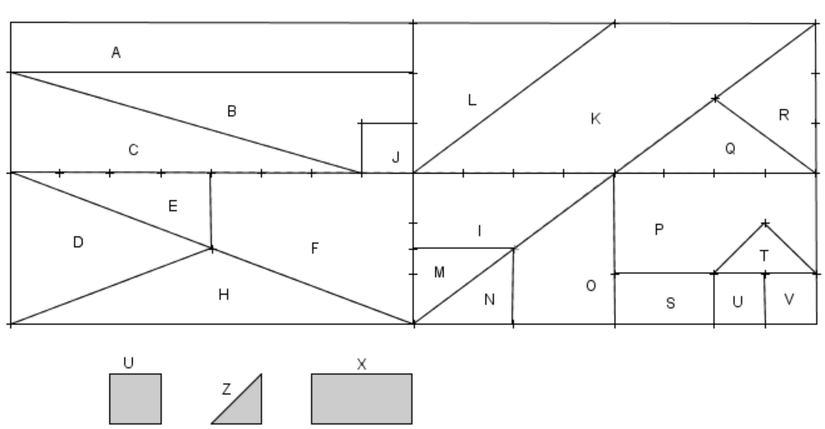


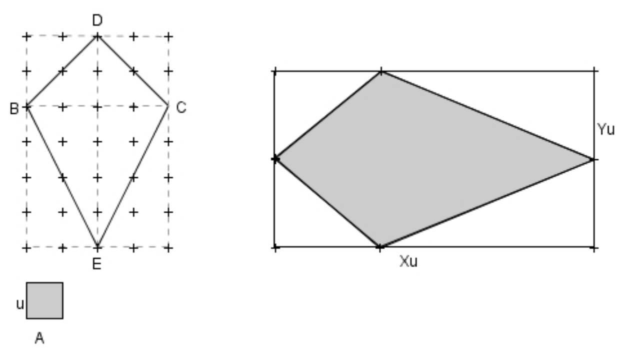
Tabla para la figura 2.

Región	Medida con U^2	Medida con Z	Medida con X	Región	Medida con U^2	Medida con Z	Medida con X
A				L			
B				M			
C				N			
D				O			
E				P			
F				Q			
G				R			
H				S			
I				T			
J				U			
K				V			

Actividad

Observa la figura siguiente. Encuentra el área para el cuadrilátero formado por los puntos ABCD, en términos de la unidad de medida A.

Encuentra la expresión para el área de la figura sombreada de la derecha.



Actividad:

Toma como unidad de medida (U) un cuadrado de los demarcados con líneas punteadas y completa la tabla con la información solicitada para cada polígono sombreado.

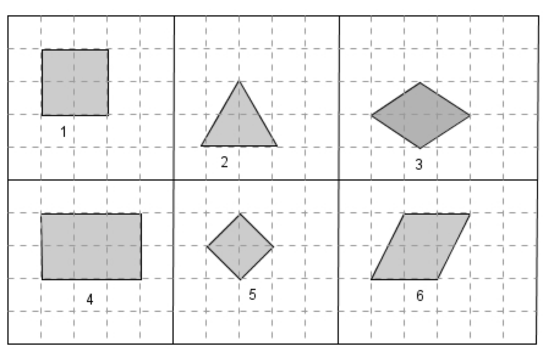


Figura a

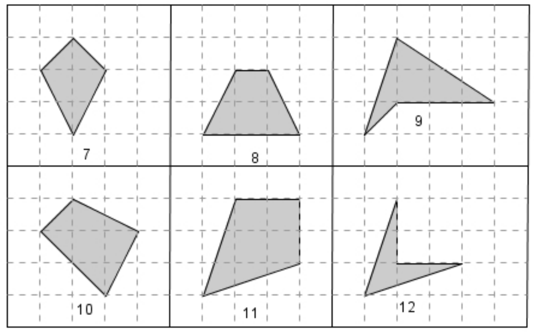


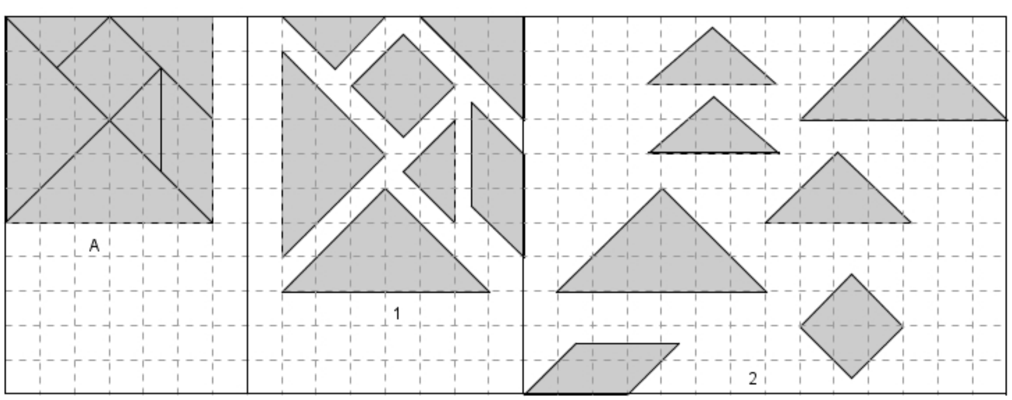
Figura b

Tabla

Polígono	Nombre	Medida con U	Expresión para calcular el área	Cálculo.
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

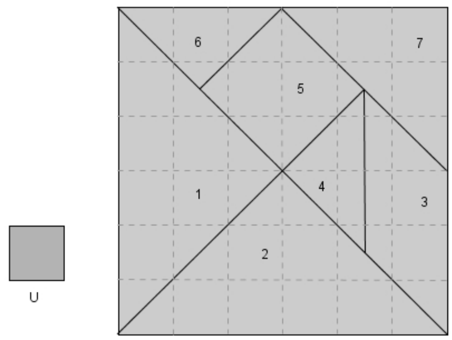
Actividad:

El profesor entrega a dos alumnos la tarea de construir las piezas para un tangram y entrega una muestra (A). Ambos realizan la tarea de forma diferente. Al momento de ensamblar las piezas uno de ellos tiene dificultad. ¿Cual de ellos se equivocó al elaborar la tarea? Indícale como solucionar el problema.



Actividad

Utiliza el siguiente tangram y tomando a U como unidad de medida, completa la tabla que aparece después de la figura.



Tangram

Figura	Base	Altura	Perímetro	Área	Cuantas U mide el Area de:
1				$\frac{b.h}{2} =$	
2				$\frac{b.h}{2} =$	
3				$b{\cdot}h=$	
4				$\frac{b.h}{2} =$	
5				$b{\cdot}b=$	
6				$\frac{b.h}{2} =$	
7				$\frac{b.h}{2} =$	

Con las siete piezas forme un cuadrado, un triángulo, un paralelogramo, un rectángulo y un trapecio y complete la siguiente tabla:

	Perímetro	**Área**
Cuadrado		
Triángulo		
Paralelogramo		
Rectángulo		
Trapecio		

MOMENTO 1. Medidas de superficie

Preliminares

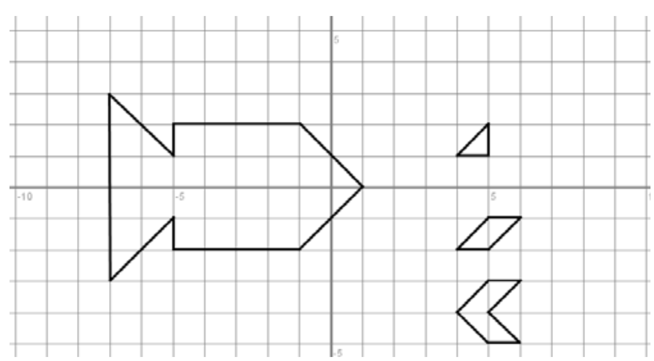
Propósito: Identificar unidades de área y establecer relaciones entre ellas al medir áreas de superficies dadas.

Tipo de Pensamiento / Grupos de Grados	Métrico	Numérico
1º a 3º	• Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos Estandarizados de acuerdo con el contexto.	• Reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, localización, entre otros)
4º - 5º	• Seleccionar unidades, tanto convencionales, apropiadas para diferentes mediciones. • Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes. • Calcular el área y volumen de figuras geométricas utilizando dos o más procedimientos equivalentes.	• Interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, razones y proporciones. • Identificar, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.
6º - 7º	• Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.	• Utilizar números (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
8º - 9º	• Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.	• Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.

Materiales: Hoja con ilustraciones

Descripción:

Se entrega al alumno una hoja (ver anexo 6) y se le pide medir la superficie, utilizando como unidad de medida la superficie S1.



Superficie uno situación cuatro.

Se le pide además que mida esta otra superficie, utilizando como unidad de medida S2.

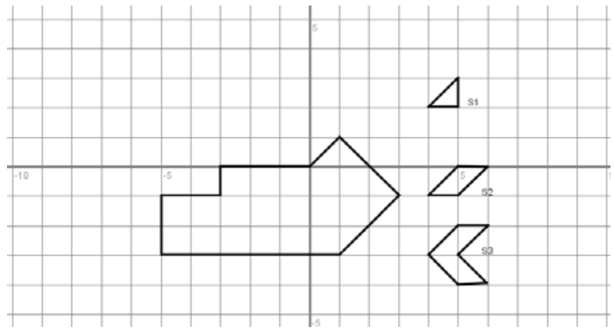


Gráfico 12: Superficie dos situación cuatro

Compara las unidades S1, S2 y S3. ¿Qué pasaría si se midiera la superficie del pez utilizando S2 como unidad de medida y si se utilizara S3?, ¿Qué pasaría si se midiera la segunda superficie con S1? (Ver anexo 5).

Se espera que el estudiante busque estrategias para iniciar la medida con S1 (**etapa de acción**), podrá hacerlo recortando el triángulo del papel y midiendo con él la superficie dada, o podrá utilizar algún tipo de rayado, como también utilizando regla, y tal vez pensando en alguna fórmula o algoritmo para las figuras que observe como polígonos conocidos.

Los estudiantes acudirán a sus compañeros y profesores para preguntarles si están haciendo lo correcto, a pedir sugerencias para resolver el problema: (**comunicación**).

Luego se anima a los estudiantes a que descubran la relación entre las unidades dadas S1, S2, S3, y a que entiendan así la construcción de un sistema de unidades de área: S1 = ½ de S2; S2 = ½ de S3; S3 = 2S2 = 4S1; S2 = 2S1.

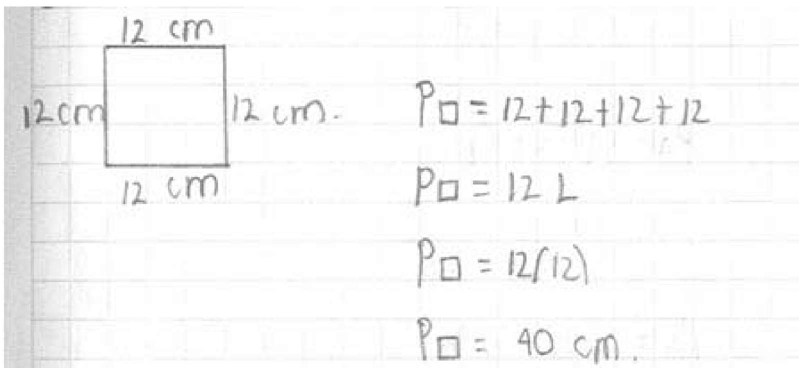
De acuerdo con las relaciones establecidas anteriormente, se observará que la medida de la superficie del pez es: 56 **S1** = 28 **S2** =14 **S3**.

Se presentará una etapa de comparación y discusión sobre los resultados obtenidos, se podrán hacer confrontaciones con las dos gráficas presentadas para que se **validen** las diferentes respuestas y procedimientos obtenidos.

6.3. Áreas y perímetros

Una de las situaciones que resulta conflictiva en el tratamiento de las magnitudes en la escuela tiene que ver con los conceptos de área y perímetro, al igual que sus procesos de medición y cálculo. La mayoría de los alumnos no parecen captar sus diferencias y terminan designando lo uno por lo otro, sin darse por enterados de que lo que allí se pone en juego no sólo es el hecho la dimensionalidad de las medidas, sino que se trata de dos magnitudes diferentes.

La siguiente figura (texto tomado de un cuaderno de sexto grado de Educación Básica) nos ilustra la forma tan pobre como nuestros estudiantes resuelven ejercicios propuestos en relación con el concepto de perímetro: Allí se evidencia que lo que el chico trata de hacer es “hallar el perímetro mediante la suma de los lados” pero . en dicho proceso no se ha enfatizado en la dimensionalidad de la medida y el uso de las unidades, además de la fallas de cálculo numérico.



La primera línea muestra que el alumno conoce que el perímetro se calcula sumando los lados, la segunda línea muestra que por esta vía consigue expresarlo como 12L (suma de lados L), está sumando “L”, no centímetros que son las unidades con las que se está midiendo los lados dados en la figura. Parece recordar que también con el cuadrado hay otra fórmula que multiplica los lados, tercera línea 12 (12), pero no lo relaciona con el área del cuadrado sino con su perímetro, lo que obtiene al final no corresponde al área y tampoco al perímetro. Lo que si evidencia es lo que ya anotamos anteriormente: la confusión entre ambos conceptos.

El perímetro tiene que ver con la magnitud longitud, pues se trata de determinar la medida de la longitud de la línea poligonal que encierra la figura o superficie, o de otro modo, determinar la longitud total mediante la adición de las medidas de las longitudes de cada uno de los lados que forma la frontera de la superficie. Por tanto, el tratamiento que debe recibir es el de medida de una longitud, como ya se trató en el capítulo que hace referencia a las longitudes. Por tanto, más que darles la fórmula para hallar los cálculos, se tratará de poner situaciones de medida, en espacios reales y luego en representaciones en papel que pongan el énfasis en los procesos de medida para que el alumno logre formalizarlos.

Hay situaciones en las cuales se puede poner en contexto de medida los perímetros, como es el caso de asignar la tarea de medir el largo de los muros (en su base) que encierran la planta física de la institución, muros o mallas de encerramiento de canchas, el borde de una placa deportiva. Este tipo de actividades no sólo permite poner el énfasis en el concepto de perímetro, sino también, permitir al alumno el manejo de estrategias para medir y usar instrumentos de medida. Otra actividad tendrá que ver con hallar las respectivas áreas o medida de las superficies correspondientes: Área del terreno donde se encuentra la planta física de la institución, acá tendrán que ponerse en juego las actividades tanto de medida como de cálculo de áreas. Área de las placas deportivas, patios.

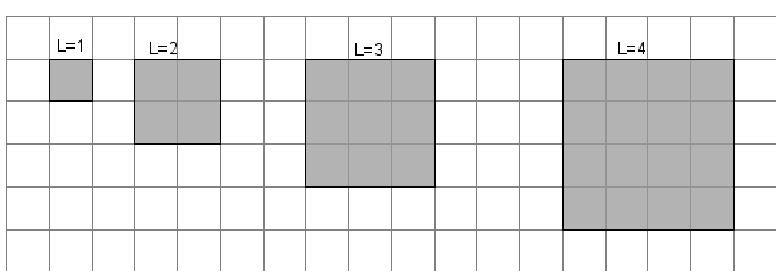
SITUACIÓN No. 1:

- **ESTÁNDARES**

1º a 3º	Comparar y ordenar objetos respecto a atributos mensurables.
	Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos Estandarizados de acuerdo con el contexto.
	A analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.
	Utilizar y justificar el uso de estimaciones de medidas en la resolución de problemas relativos a la v ida social, económica y a las ciencias.
	Reconocer el uso de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas
3º a 5º	Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa- peso, tiempo y amplitud angular) en diversas situaciones.
	Seleccionar unidades, tanto convencionales como ESTTÁNDARizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
	Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes.
	Describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando es constante una de las dimensiones.
6º a 7º	Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
	Calcular áreas y volúmenes a través de recomposición y descomposición de figuras y cuerpos.
	Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.
	Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.
8º a 9º	Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.
	Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

Actividad 1:

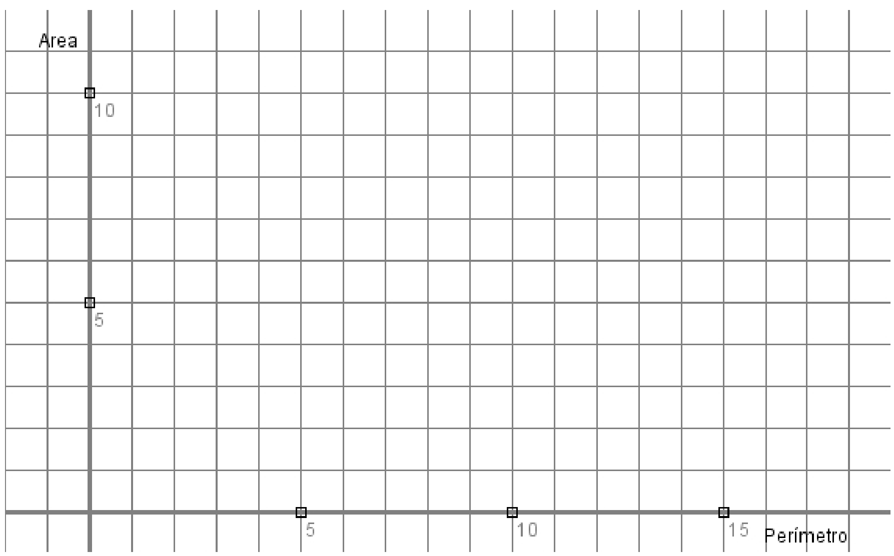
Observa la figura y completa la tabla siguiente.



	Cuadrado 1	Cuadrado 2	Cuadrado 3	Cuadrado 4	Cuadrado n
Lado	1 u	2u	3u	4u	
Perímetro.	4u				
Area.	$1u^2$				

Con los datos de la tabla anterior responde las siguientes preguntas, tomando como unidad de medida para el perímetro el lado del cuadrado 1, de lado 1u, y para el área el cuadrado 1 cuya área será $1u^2$.

- Si duplicas el lado del cuadrado el área también se duplica?
- ¿Puedes identificar alguna razón de cambio en ambas magnitudes (perímetro y área correspondiente) que sea constante? Explicar.
- Completa la siguiente representación cartesiana de la relación del perímetro de cada cuadrado y su respectiva área. Describe con tus palabras el tipo de gráfica.



Actividad 2

En los grados de octavo o noveno se puede entrar a discutir la siguiente situación:
¿Cuanto hay aumentarle al lado cuadrado 1 para obtener un área igual a $2u^2$.?
Elaborar una tabla semejante a esta y con ayuda de la calculadora hacer aproximaciones por la derecha y por la izquierda del valor $\sqrt{2}$.

Lado	**1u**	**1.2u**			**¿- -?**			**1.4u**	**1.5u**	**2u**
Área					**$2u^2$**					

Esta es una situación que se sale del contexto de la medida en forma directa puesto que involucra la irracionalidad de $\sqrt{2}$, y la inconmensurabilidad del lado del cuadrado y su diagonal.

Si suponemos un cuadrado A de lado L su área será L^2. si suponemos X el lado del cuadrado (B) que tendrá el doble de área, tendremos: Area del cuadrado B será X^2, que será igual a $2L^2$, luego X en términos de L será:

$$x^2 = 2L^2$$
$$x = \sqrt{2L^2}$$
$$x = L\sqrt{2}$$

Lo que habrá que aumentarle al lado para obtener un área doble será la diferencia entre el lado dado en el cuadrado A (L) y el lado del cuadrado B (X):

$$x - L = L\sqrt{2} - L = L(\sqrt{2} - 1)$$

Como se puede apreciar acá se involucran conceptos de la irracionalidad de OJO, que no son objetos de medición, y por tanto se debe hacer uso de una calculadora para determinar el valor de dicha diferencia, que no es expresable con un número de la forma m/n L. Lo importante será poder discutir con los alumnos la interpretación del resultado obtenido con la calculadora:

Lado	1	1.2	1.3	1.4	1.5
Cambio		0.2	0.3	0.4	0.5
Área.	1	1.44	1.69	1.96	2.25

Acá se puede analizar que si queremos un cuadrado de área 2 el lado será menor que 1.5 pero mayor que 1.4, tendríamos que aumentar más de cuatro décimas, pero menos de cinco décimas. Lo que implicaría tomar unidades del rango de las centésimas, o sea buscar entre 1,40 y 1,50, para establecer dicho valor.

Lado	1.40	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45
Cambio			0.42	0.43	0.44	0.45
Area.	1.96	1.98..	2.01			

Analizando estos resultados, vemos que dicho lado debe ser mayor a 1.41 pero menor a 1.42, luego tendríamos que pensar en unidades del orden de las milésimas. Buscar entre 1.410 y 1.420. Téngase en cuenta que este proceso no acotaría completamente el valor buscado y lo que se busca es interpretar el resultado obtenido en la primera instancia.

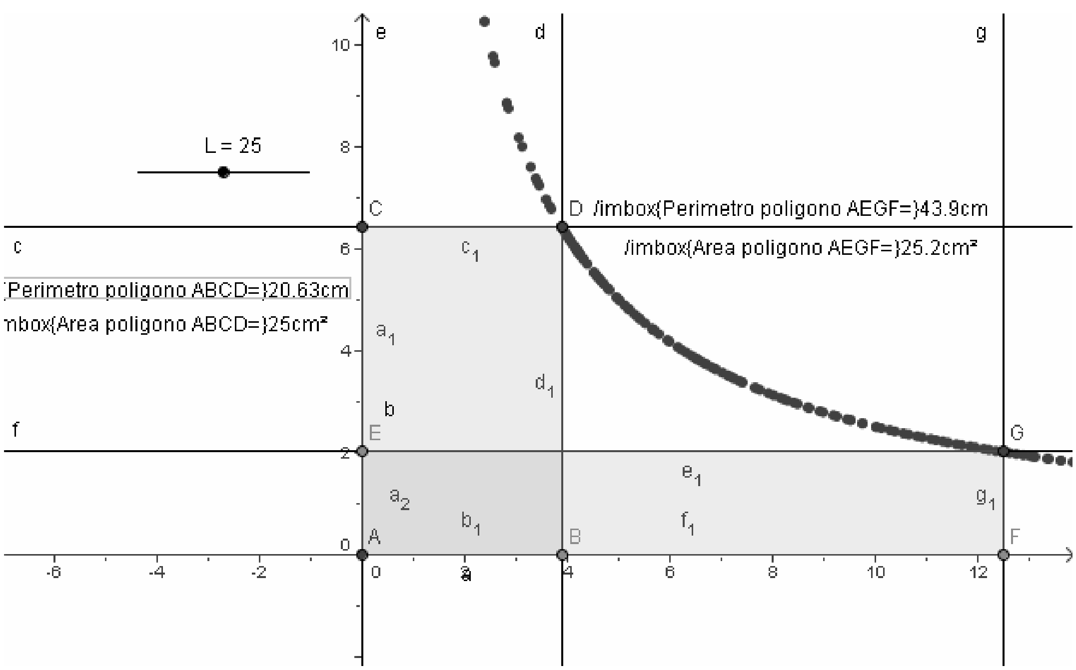
Actividad 3:

- Construir todos los rectángulos que tengan un área de 64 u^2. Tomar en primera instancia valores enteros para la base y la altura.
- Con la información obtenida, completa la siguiente tabla: Expresa cada rectángulo obtenido como el producto de la base por la altura:

Rectángulo (área)	$(64 \times 1)u^2$			
Largo.	64 u			
Ancho.	1u			
Perímetro.	130u			

- ¿Cual es el rectángulo con menor perímetro? ¿Qué características tiene?
- ¿Qué otros rectángulos se podrían obtener, que no tengan un valor entero en sus medidas (largo y ancho)?

Con respecto a esta última pregunta vale la pena volver a reflexionar sobre la situación planteada en el módulo de pensamiento algebraico y construida con Geogebra, en la relación de cambio entre áreas y perímetros, como se observa en la siguiente figura, en donde se mantiene constante el área del rectángulo. Obsérvese que el área es de 25 cm^2, para todos los posibles rectángulos, en, tanto que el perímetro varía: Rectángulo ABCD perímetro de 20.63 cm y rectángulo AEGF perímetro 43.9 cm. Allí aparece la traza del punto D que describe el vértice de todos los posibles rectángulos con área igual.



Actividad 4:

Pensemos ahora en los rectángulos que pueden ser construidos dado un perímetro fijo.

- Entregar a los alumnos una cuerda de 144 centímetros y pedirles que en el patio demarquen el rectángulo de mayor y menor área que puedan encerrar con dicha cuerda.
- ¿Si la forma no es rectangular se podrá obtener un área encerrada mayor que la anterior?.
- Si construimos una circunferencia de longitud igual a la cuerda, cual sería el área que se encierra?

Esta última pregunta busca introducir el problema de la medida de la longitud de la circunferencia y su área. Por tanto se espera que como resultado del análisis y discusión en grupo con la ayuda del profesor se reflexione acerca de:

- Por un lado la inconmensurabilidad del diámetro de la circunferencia y su longitud, que es lo que representa el número pi.
- Y de otro lado, se logre formalizar la situación en términos de las siguientes relaciones:

$Longitud = 144\ cm$ $\qquad$ $144\ cm = 2\pi r$

$Área = \pi r^2$ $\qquad$ $A = \pi\left(\frac{68}{\pi}\right)^2$ $\qquad$ $A = \frac{4624}{\pi} \approx 1471.864914\ cm^2$

Que esperamos sea el máximo rectángulo obtenido en el caso anterior.

Actividad 5: Repartición de tierras.

Uno de los aspectos en los cuales se manifiesta el poco desarrollo del pensamiento métrico tiene que ver con la confusión que los alumnos presentan frente a estos dos conceptos: por lo general tienden a confundir no sólo las unidades en las cuales se expresan sino más aun las magnitudes como tales.

Es muy importante que el alumno sea confrontado con situaciones que permitan reconocer cada una de las magnitudes, sus unidades, un aspecto que resulta muy interesante es la relación que se presenta cuando se mantiene constante una de las magnitudes y se hace variar la otra: dado un perímetro que objetos o figuras se pueden encerrar con la misma área o viceversa, dada un área determinada es posible preguntarnos que figuras tienen igual, mayor o menor perímetro.

Actividad 6: Duplicando áreas y triplicando volúmenes.

Una discusión que puede resultar interesante con los estudiantes tiene que ver con la relación que hay entre el área de un cuadrado y su lado o el volumen de un cubo y su arista. La mayoría tiende a creer que si duplicamos el lado del cuadrado se duplica su área y su duplicamos el lado de un cubo el cubo duplica su volumen.

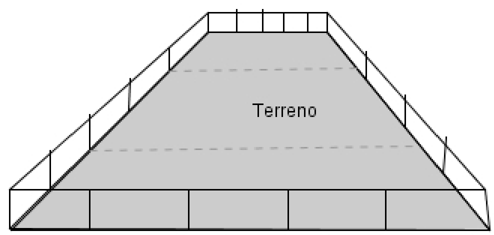
Discusión:

Dado un cuadrado de lado "*L*", ¿Cuál es su área?. ________Si duplicamos el lado del cuadrado ¿Cuál es su área?_____________.

Dado un cubo de arista "*L*" ¿cuál es su volumen?_______ ¿si duplicamos su arista,¿cual es su nuevo volumen"?_______________

Actividad 7: Repartición de tierras.

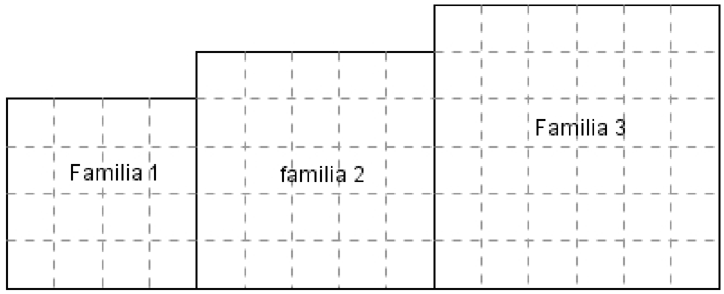
Una parte de una finca completamente plana va a ser repartida entre 3 familias. La superficie es tan grande que cada familia podría tomar lo suficiente para vivir cómodamente. Para evitar que se sientan engañados se les da la oportunidad de escoger el tamaño de su parcela, pero para evitar abusos a cada propietario se le hace entrega de sólo una cuerda de alambre de 480 metros de larga para encerrar su terreno en forma rectangular y con una sola pasada (hilada). Coloca en la tabla siguiente las posibles formas de encerrar las parcelas



Formas	Largo	Ancho	Alambre gastado (perímetro)	Área del terreno encerrado.

¿Cuál fue la forma que escogieron para encerrar sus parcelas? Explica.

Una vez decidida la forma que tendrían sus parcelas la familia uno tomó la iniciativa de cercar primero su terreno. Luego vino la familia dos y aprovechó un costado del terreno del vecino y lo mismo hizo la familia tres (como lo muestra la figura). Al ver a sus vecinos, la familia uno demandó a sus vecinos porque emplearon más del alambre, permitido ganando con ello ilícitamente más terreno. Quién de ellos abusó?. Para determinar la respuesta completa la tabla siguiente.



	Alambre utilizado (m)	Área cercada	Alambre utilizado de mas (m)	Metros cuadrados de más, frente a fam.1, que tiene
Familia 1				
Familia 2				
Familia 3				

Para reparar el abuso las familias culpables deben devolver el alambre de más utilizado y hallar una solución que beneficie a las tres familias. Como la familia uno siempre es adelantada propone que cada uno haga su cerco independiente de los demás así como ellos lo hicieron y no tendrían dificultades. Llena la tabla con los datos de la propuesta:

	Alambre utilizado (m)	Área cercada (m^2)	Área que pierde (m^2)
Familia 1			
Familia 2			
Familia 3			

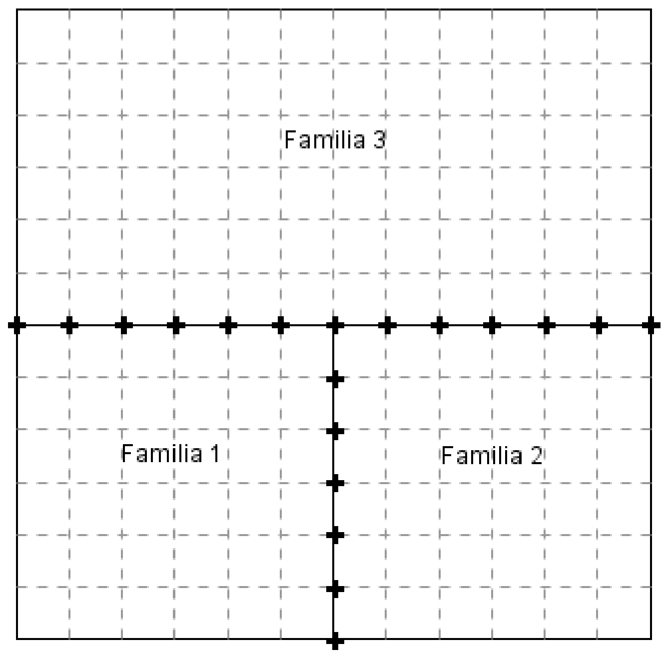
La familia causante del problema viendo la enorme pérdida que tendrían, propone que se le entregue todo el alambre y garantiza que cada familia recibirá una recompensa: A cada familia le entregaría un terreno igual al que ella tenía. Viendo la ganancia del negocio la familias 1 y 2 aceptan el trato. Y para evitar futuros problemas firman un documento de compromiso aceptando el acuerdo y como signo de confianza sólo pondrán marcas que indican líneas rectas que demarcan los terrenos.

¿Cuál fue la familia que propuso el trato?___________________

La familia tomó todo el alambre y cercó un terreno en forma cuadrada y entregó a cada familia lo prometido.

Tabla con el arreglo final.

	Alambre utilizado (m^2)		Área que recibe (m^2)	Metros cuadrados que gana
Familia 1				
Familia 2				
Familia 3				
Área total del terreno (m^2)		Perímetro (m)		



Arreglo final

Unidad No.7

La Magnitud Volumen[17]

7.1. Concepciones acerca del volumen

La enseñanza que se imparte en la escuela en cuanto al pensamiento métrico y específicamente de la magnitud volumen posee una estructura bastante particular, pues tanto los conceptos que se presentan en los textos escolares para el Área de Matemáticas y las concepciones que tienen los maestros y alumnos acerca de esta magnitud muestran un trabajo similar, único y exclusivo. El volumen suele presentarse como "el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio", lo cual limita dicha definición únicamente a la medida de los cuerpos, dejando de lado el volumen que puede ser medido a partir de un espacio tridimensional.

Del mismo modo se muestra como el volumen es hallado mediante el conteo de unidades cúbicas que lo conforman, es decir, cubos cuyas aristas se miden en metros con sus respectivos múltiplos y submúltiplos; se excluyen otras unidades de medida representadas a partir de diferentes cuerpos que pueden ser utilizados para encontrar el volumen de un espacio. Se adopta para expresar la medida de esta magnitud, el metro cúbico o el centímetro cúbico como únicas unidades y se plantea a partir de la conversión de unidades, multiplicando o dividiendo según la unidad sea de orden inferior o superior respectivamente.

También se plantean diferentes ejercicios y se proporcionan datos y medidas necesarias para aplicar fórmulas a la hora de hallar el volumen de los cuerpos más comunes. Casos en los cuales el estudiante no tiene que pensar en el problema como tal sino recordar las equivalencias necesarias para hacer las conversiones correspondientes, no haciendo, además un uso consciente de la notación científica y la notación decimal.

Así mismo, otro de los problemas que enfrenta el proceso para medir la magnitud volumen tiene que ver con la forma como se le entrega al alumno fórmulas para que sean aplicadas directamente en un determinado ejercicio, sin desarrollar una construcción previa de estas a partir de situaciones problema que lleven al alumno a descubrir las diversas relaciones que se establecen entre ellas. Sólo se les enseña a aplicar un algoritmo, sin permitir al estudiante que sienta la necesidad de hacer las conversiones de unas unidades en otras a partir de la medición entre ellas y en contextos de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de la Matemática misma.

---

[17] Esta unidad fue escrita con la colaboración de Maritza Agudelo, y otros. Situaciones didácticas para la enseñanza del volumen. Proyecto de práctica U de A, 2006

El volumen y la capacidad son magnitudes que expresan la medida del tamaño de cuerpos o regiones tridimensionales. La comprensión de estas magnitudes implica la realización de actividades que requieren de comparaciones tanto indirectas como directas.

La medida directa de estas magnitudes es compleja de realizar en la mayor parte de los casos, por lo tanto para calcularla se hace necesario el desarrollo de fórmulas; estas magnitudes deben ser construidas mediante actividades significativas que comprometan al estudiante con su aprendizaje.

Las medidas de volumen se utilizan para objetos de tres dimensiones que permiten medir linealmente cada una de ellas, sin embargo es bastante frecuente utilizar medidas de volumen para medir capacidades o contenidos.

> "El volumen se usa para designar la característica de todos los cuerpos de ocupar un espacio. Se trata de una magnitud extensiva, derivada; cuya unidad principal es el metro cúbico" (GODINO. 2002; Pág.16)

> "... puede llamar la atención el hecho de que el volumen y la capacidad parezcan sinónimos, cuando usualmente se suelen entender el volumen como el espacio ocupado y la capacidad como espacio vacío con posibilidad de ser llenado" (Del OLMO y otros.1993. Pág. 98).

Según Vergnaud, el volumen es una magnitud que es susceptible de dos tratamientos, uno como magnitud unidimensional, que puede ser comparada, medida, evaluada, aproximada, sumada, restada, etc., en función de ella misma, y otro como magnitud tridimensional, que permite medirla en función de otra magnitud (la longitud). El segundo tratamiento del volumen corresponde a modelos multiplicativos que se pueden ver obstaculizados por modelos aditivos que anteriormente el niño ha desarrollado y que pueden conducirlo a errores.

Las medidas de capacidad se usan para hablar de la cantidad de líquido que cabe en un determinado recipiente, a pesar de no tener ningún modelo matemático, se recurre al volumen para trabajarla Matemáticamente.

> *"se usa la palabra capacidad para designar la cualidad de ciertos objetos (recipientes) de poder contener líquidos o materiales sueltos (arena, cereales, etc.)...*

> *La capacidad de un recipiente coincide con el volumen del espacio interior delimitado por las paredes del recipiente, y viceversa, el volumen de un cuerpo coincide con la capacidad de un recipiente que envolviera com*pletamente a dicho cuerpo."(GODINO, 2002. Pág. 16)

7.2. La medición del volumen

La medición comienza con la percepción de lo que debe ser medido, a la que le sigue la comparación de atributos o propiedades de objetos que posean las mismas características. Esta comparación conlleva hacia la necesidad de elegir una unidad de medida que se pueda aplicar constantemente, es decir, la elección de un referente, ya sea estándar o no estándar que permita determinar la medida de dicho objeto. Si se toma un referente estándar se podrá dar una medida precisa y consistente (en todas partes del mundo), en otras palabras, habrá una comunicación de dicha medida de un modo abreviado y directo.

Para el tratamiento de una determinada magnitud, en especial para el tratamiento de la magnitud volumen en la escuela, debe permitirse la comparación de objetos respecto a ella, plantear la necesidad de una unidad de medida, conocer y usar las diferentes unidades, estimar la medida del volumen de objetos, y finalmente, aplicar todos estos conocimientos en la resolución de diferentes problemas.

La comparación con respecto a la magnitud volumen hace referencia a la manipulación de diferentes cuerpos, ya sean regulares e irregulares, con el fin de establecer relaciones como:"mayor que", "menor que" o igualdad entre el volumen de estos cuerpos. Este proceso se relaciona con el proceso de conservación el cual se refiere a la invarianza de cierta cualidad en un objeto después de realizar determinadas transformaciones sobre este, es decir, *"es la capacidad que tienen algunas características de los cuerpos, de no cambiar aunque se le manipule y se produzca cambios de situaciones en los mismos"*(JUAN D. GODINO. 2002, Pág 31). Para construir en los estudiantes una aproximación a este proceso se pueden diseñar una serie de actividades como por ejemplo: comenzar por transformar los objetos a partir de romper, deshacer, vaciar cantidades para comparar contenidos, etc.

En cuanto al volumen son varias las dificultades que los alumnos presentan a la hora de resolver situaciones que involucran la conservación de dicha magnitud, pero una de las más frecuentes se relaciona con la altura, ya que los niños piensan que a mayor altura mayor volumen, sin prestar mayor atención al diámetro que conforma el recipiente, es decir, no existe una conciencia por parte del alumno al relacionar variables como: área de la base y altura, sino que sólo hay una relación entre lo que el alumno a simple vista considera más grande. Por ejemplo, al trasvasar líquidos de un recipiente a otro que tienen diferente forma pero igual capacidad, los alumnos dudan de que la altura no interviene a la hora de determinar la cantidad de volumen que cabe en un recipiente.

Se puede proporcionar, en primera instancia, un sistema irregular de unidades de medida, donde el alumno tenga la posibilidad de iniciarse en el desarrollo de este proceso (medición) haciendo uso de unidades de medida no-convencionales; sin embargo, para que el proceso no se haga complejo es necesario introducir paulatinamente un sistema regular de unidades de medida, en otras palabras, un sistema común y universalmente aceptado (unidades convencionales) que permita comunicar los resultados de las medidas a cualquier parte, sin necesidad de llevar consigo las unidades adoptadas por una determinada sociedad.

Otro aspecto importante, de forma análoga a las demás magnitudes tratadas en este módulo tiene que ver con el proceso de estimación de volumen en distintos contextos.

7.3. Aportes a la enseñanza del volumen

En cuanto al desarrollo de la magnitud volumen, se busca que el alumno atienda a procesos y conceptos, tales como: el desarrollo de la estimación y la conservación, la selección de unidades y la solución de problemas, entre otros, con el fin de posibilitar una construcción adecuada de dicha magnitud.

Con relación a los procesos de estimación y conservación, el alumno debe enfrentarse a situaciones significativas donde sea capaz de comparar y establecer relaciones importantes que den sentido a lo que él realiza. Por ejemplo, para lograr la adquisición del principio de conservación se pueden idear actividades que lleven al alumno hacia el reconocimiento de propiedades invariantes de un objeto luego de haber realizado una determinada acción sobre este. Una de estas actividades puede ser:

- Disponer sobre una mesa diferentes paralelepípedos construidos con cubos, entre los cuales existan aquellos que tienen igual volumen o diferente volumen. Por ejemplo incluir dentro de dicho conjunto paralelepípedos de 3 x 3 cubitos de base y 4 de altura, 2 x 2 de base y 9 de altura, 3 x 2 de base y 9 de altura,1 x 2 de base y 18 de altura, etc. Luego se pide a los alumnos que seleccionen aquellos paralelepípedos cuyo volumen es igual.

Con esta actividad el alumno estará enfrentado en primera instancia a poner en juego el concepto de volumen y en segunda instancia se apreciará cómo los alumnos encuentran relaciones de igualdad entre el volumen de aquellos paralelepípedos que tienen diferente forma. Así mismo, se puede proponer al alumno la construcción de otros paralelepípedos que cumplan las mismas características, o la construcción de otros a partir de unidades cúbicas que tengan diferente forma.

- Para el trabajo con la estimación es importante incluir actividades donde el alumno tenga la posibilidad de manipular unidades de medida y realizar medidas directas de algunos cuerpos. Se puede pedir al estudiante medir el volumen de cajas o recipientes haciendo uso de diferentes unidades cúbicas como esferas y cubos, planteando interrogantes como ¿con cuál de las unidades utilizadas se obtuvo una medida precisa del volumen?, ¿qué estrategia empleaste a la hora de asignar una medida de volumen sobre los cuerpos?. De esta manera el alumno se dará cuenta que es necesario estimar el volumen de algunos cuerpos cuando la unidad de medida no pueda llenar completamente el objeto. Del mismo modo, se pueden proponer actividades donde estudiante estime la cantidad de ladrillos utilizadas para construir una pared de su casa, la cantidad de cajas que caben en una habitación, o la cantidad de canicas que caben en un tarro; estas actividades deben llevarse a cabo ya sea con el objeto (unidad de medida) presente o con el objeto ausente.

La necesidad de elegir una unidad apropiada a la hora de medir una magnitud como el volumen, surge de la manipulación y medición del volumen de objetos con unidades no-convencionales; cuando al alumno se le pide efectuar medidas de dicha magnitud haciendo uso de tales unidades, él mismo se dará cuenta que es difícil comparar o comunicar dicha medida a otras personas.

El trabajo con las unidades de medida y la importancia de encontrar relaciones de equivalencia entre estas es una de los elementos fundamentales para abordar las magnitudes. Por ejemplo, el alumno puede construir un cuerpos con un cm^3, un dm^3 y un m^3 y medir el volumen de unos en términos de los otros, es decir, llenar el dm^3 y el m^3 con el cm^3 o también llenar dm^3 con el cm^3; esta actividad pude ir acompañada de preguntas tales como: ¿cuántos cm^3 tiene un dm^3?, ¿cuántos dm^3 y cm^3 tiene un m^3?. Seguidamente el alumno podrá realizar medidas del volumen de algunos cuerpos haciendo uso de una unidad y posteriormente de varias unidades, a partir de lo cual podrá iniciarse en la conversión de unidades del volumen. También, se sugiere plantear situaciones que impliquen la elección de una unidad adecuada para medir el volumen de cuerpos como cajas (grandes o pequeñas), casas, dados, vasos, balones, y otros objetos manipulables por los alumnos dentro de su entorno. "Utilizando distintas unidades se puede observar como se obtienen mejores aproximaciones (por exceso o por defecto) del volumen de un determinado cuerpo o espacio. También se debe incidir en la importancia del error cometido cuando se realiza una aproximación, ya que resulta imprescindible considerar el tipo de tarea que trabajamos y el grado de precisión que necesita".[18]

Según los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas: *"El acercamiento de los estudiantes a las Matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las Matemáticas y de otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las Matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las Matemáticas".(LINEAMIENTOS CURRICULARES PARA EL ÁREA DE MATEMÁTICAS 1998).*

Según los diferentes aspectos planteados anteriormente acerca de la enseñanza tradicional de la magnitud volumen, se puede afirmar que los alumnos aprenden conceptos relacionados con la medida de forma descontextualizada, pues la aplicación de situaciones problema en la escuela, se retoma luego de que haya ocurrido el aprendizaje, sin tener en cuenta que dichas situaciones son una herramienta importante y un excelente potencial para encauzar todas las fases del aprendizaje.

Para la enseñanza de la magnitud volumen, tal aspecto, se evidencia cuando se le plantean al alumno ejercicios o problemas que involucran la aplicación de un algoritmo o la aplicación de fórmulas dadas para encontrar el volumen de los cuerpos.

Es importante tener en cuenta que el desarrollo de fórmulas para calcular la medida de la magnitud volumen se hace útil y significativo cuando el alumno ha tenido la oportunidad de enfrentarse a situaciones que requieren la medida directa de dicha magnitud, puesto que debido a diversos aspectos como errores en la estimación, aproximación, uso de instrumentos de medida o incluso situaciones donde no es posible realizar una medida directa del objeto se podrá determinar la importancia y necesidad de aplicar tales procesos algorítmicos que luego de haber sido comprendidos se convierten en procesos ágiles para la medida de cualquier magnitud. Por ejemplo, el alumno podrá llenar una caja de pastillas haciendo uso de centímetros cúbicos, y encontrar de forma directa el volumen de

[18] SUPERFICIE Y VOLUMEN. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?. María Angeles del Olmo Romero, Maria Francisca Morena y Francisco Gil Cuadra. Editorial SINTESIS. 1993.

esta; sin embargo cuando se le pide replicar la misma unidad sobre una caja de 50 x 50 centímetros de base y 80 centímetros de altura, este se dará cuenta que dicho procedimiento es bastante complicado y por lo tanto es necesario emplear otro tipo de estrategia para encontrar el volumen. Además, es recomendable que los niños no hagan uso de las fórmulas sin haber realizado una construcción previa de estas por parte de ellos mismos.

Esto implica que el alumno debe hacer parte de un aprendizaje basado en situaciones problema cuyo propósito depende del tipo de conceptos o procesos que se quieran desarrollar en los estudiantes. Sin embargo, lo más importante a la hora de construirlas y ponerlas en práctica es lograr que estas permitan la aplicación de diversas estrategias, la verificación e interpretación de resultados, la exploración y uso de materiales concretos, la utilización y dominio de instrumentos de medida, la generalización de soluciones, entre otros.

7.3.1. Situación 1: oferta de refrescos en el supermercado la excelencia

Propósito:

Medir diferentes capacidades con instrumentos de medida no Estandarizados, utilizando varias unidades de medida.

Descripción de la situación:

En los diversos contextos económicos pueden encontrarse relaciones directas entre la medida de un producto y el valor del mismo, lo cual constituye un elemento importante a la hora de diseñar y aplicar situaciones problema.

Con el desarrollo de esta situación se pretende que el alumno compare diferentes capacidades por medio de algunos recipientes (botellas y vasos) y sea capaz de establecer relaciones y diferencias entre estos y sus precios; teniendo en cuenta el concepto de capacidad, la conversión de unidades a partir de unidades convencionales y no convencionales, además de los procesos de medición y estimación relacionados con la magnitud capacidad.

El estudiante debe explorar, comparar, relacionar y encontrar equivalencias entre las diferentes unidades de medida, que se trabajan en toda la situación.

Materiales: Los medios físicos que se utilizan para el desarrollo de esta situación son: agua, vasos desechables, botellas de refresco de diferentes tamaños con marcas específicas, papel y lápiz.

- **ESTÁNDARES RELACIONADOS:**

8º a 9º	Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados
	Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.

Descripción

Se entregará a los estudiantes una con la siguiente situación:

El supermercado "La excelencia" ofrece al cliente gran variedad de refrescos en diferentes presentaciones y a diferentes precios. Algunas de las presentaciones de refresco que se encuentran en el supermercado son:

- Vaso A (9 onzas) a $797
- Vaso B (3.5 onzas) a $254
- Gaseosa de 1 ¼ Litros a $ 1600
- Gaseosa de 2 litros a $2500

Actividad 1:

En esta actividad el alumno debe realizar comparaciones entre la cantidad de agua que llena el vaso A con el vaso B, siendo aproximadamente una tercera parte de vaso, y la cantidad de agua que llena el vaso B con A, que es dos vasos y medio. Se espera que el estudiante encuentre la relación entre las capacidades de los vasos y determine que comprar la gaseosa contenida en el vaso B es más económico que comprar la contenida en el vaso A; ya que tres vasos B de gaseosa llenan completamente un vaso A, sobrando líquido y además el costo de los tres vasos B ($762) es menor que el costo de un vaso A ($797).

Uno de los clientes del supermercado decide comprar alguna de las gaseosas que se ofrece, teniendo en cuenta el precio de cada una, ayúdale a decidir cual es la compra que se ajusta a las necesidades de este.
Realiza las siguientes actividades para tal fin

Llena el vaso B con agua. Luego deposita el agua en el vaso A.

a. ¿Cuántos vasos B se requieren para llenar el vaso A?

____

____

b. ¿Qué cantidad del vaso A, llena el vaso B?

____

____

c. Compara los precios de los vasos según la cantidad de gaseosa que contiene cada una.

____

____

Si el cliente desea tomar la cantidad de gaseosa del vaso A ¿será más conveniente comprar directamente este vaso o comprar vasos B que equivalen a la misma cantidad? ¿Por qué?

____

____

Actividad 2:

En esta actividad se espera que el estudiante mida la capacidad de un mismo recipiente (botella de 1 ¼ litros) con dos unidades de medida diferentes (vasos A y B), para luego determinar con cuál de las dos unidades utilizadas es más precisa la medida de la capacidad del recipiente. El estudiante debe darse cuenta que es más fácil llenar la botella de 1 ¼ litros con el vaso A, puesto que contiene más agua y se llena más rápido, pero es más preciso llenar la botella de 1 ¼ con el vaso B, pues proporciona una medida más aproximada, ya que contiene menos agua.

Del mismo modo el estudiante debe encontrar que es más económico comprar la cantidad de vasos B que llenan la botella de 1 ¼ litros (12 vasos y medio), ya que comprará más cantidad por un menor precio: $3586.5. Además la diferencia de los precios ($411) al llenar la botella de 1 ¼ litros con vasos A y al llenarla con vasos B, permite establecer la relación entre las cantidades y los precios.

El cliente decide llevar una cierta cantidad de gaseosa para su casa. Ayúdale a tomar la mejor decisión.

a. ¿Cuántos vasos A hacen 1¼ litros?

____

____

b. ¿Cuántos vasos B hacen 1¼ litros?

____

____

c. ¿Con cuál vaso fue más fácil llenar 1¼ litros y con cuál es más precisa la medida? ¿Por qué?

____

____

d. ¿Qué es más económico comprar, el 1¼ litros que se llena con la cantidad del vaso A? o ¿Comprar el 1¼ litros que se llena con la cantidad del vaso B?

____

____

e. ¿Qué diferencia hay en precio, al llenar 1¼ litros de gaseosa en vasos A y al llenar en vasos B?

____

____

Actividad 3:

En esta actividad el estudiante debe comparar el contenido de una botella (1 ¼ litros) con el contenido de otra (2 litros), en este caso debe identificar la equivalencia de la cantidad de contenido entre los vasos (A y B) y las botellas (1 ¼ y 2 litros) en casos específicos. Se espera que las respuestas de los estudiantes no sean las mismas, ya que dependiendo de las respuestas anteriores se obtiene la solución de ésta actividad. Lo que más interesa son los procedimientos y las medidas realizadas, es decir, observar y determinar si confunden las diferentes unidades de medidas y si se opera (suman, restan) con ellas indistintamente.

Vierte agua en la botella de 1¼ litros pásala a la botella de 2 litros las veces que sea necesario para llenarla

a. ¿Cuántos envases de 1¼ litros necesitas para llenar el envase de 2 litros?

____

____

b. Si el cliente compra 25 vasos de tipo B, qué cantidad de gaseosa está comprando. ¿Cuál es la forma más económica de adquirirla? Y ¿Por qué?

____

____

c. Si el cliente compra 47 vasos de tipo A, qué cantidad de gaseosa está comprando. ¿Cuál es la forma más económica de adquirirla? Y ¿Por qué?

____

____

Actividad 4:

En esta actividad al igual que en la segunda, se espera que el estudiante mida la capacidad de un mismo recipiente (botella de 2 litros) con dos unidades de medida diferentes (vasos A y B), para luego determinar con cuál de las dos unidades es más económico comprar el contenido de 2 litros. El estudiante debe establecer relaciones entre diferentes unidades de medida utilizadas durante la situación, como onzas y litros, mediante proporciones directas y la conversión de dichas unidades.

Se debe aclarar que las onzas son unidades de masa en el sistema inglés de unidades, aunque a nivel nacional son utilizadas para medir capacidades y se presenta la siguiente equivalencia: $1dm^3 = 1l = 35.27$onzas. (dm^3 = decímetro cúbico, l = litro)
En ésta actividad también se propone un problema en el que se deben relacionar la cantidad de vasos (A y B), con los diferentes costos para hallar la cantidad desconocida de acuerdo con los precios.

Para finalizar la situación se proponen dos interrogantes en los que el estudiante al llenar los vasos de agua debe darse cuenta que el vaso A tiene mayor capacidad que el vaso B y a su vez debe determinar que el volumen y la capacidad no dependen de la forma del recipiente sino de la cantidad de líquido que éste contiene.

a. Llena la botella de 2 litros con el vaso A y luego con el vaso B. ¿Con cuántos vasos de A se llena la botella y con cuántos vasos de B?

____

____

b. ¿Cuál es la forma más económica de comprar 2 litros de gaseosa, por vasos A, por vasos B, o la botella? y ¿por qué?

c. ¿Qué capacidad tienen 4 vasos A de gaseosa? Escribe la respuesta en las diferentes unidades.

d. ¿Cuántos vasos B necesito para llenar 4 vasos A?

e. Si Pedro se toma 6 vasos de gaseosa de tipo B y su mejor amigo se toma algunos vasos de gaseosa de tipo A, por lo que pagaron $3915 ¿Cuántos vasos A de gaseosa se tomó el amigo de Pedro?

Atrévete a responder

Llena los recipientes de agua, observa detenidamente y responde:

a. ¿Cuál vaso crees que tiene más capacidad? ¿Por qué?

a. ¿El volumen y la capacidad dependen de la forma del recipiente? ¿Es igual hablar de capacidad y volumen? ¿Por qué?

Análisis

Es pertinente hacer una discusión sobre las respuestas obtenidas por cada uno de los grupos en las actividades realizadas en la situación. Cada equipo debe exponer los resultados y conceptos nuevos aprendidos, además deben comparar las respuestas con las de los otros grupos, con el fin de argumentar sus propias respuestas o aceptar las de los otros compañeros. Además debe recogerse información sobre las dudas y cuestionamientos que presentan los estudiantes al momento de resolver la situación. Y debe establecerse conclusiones con relación a los siguientes aspectos:

- Entre los diferentes productos que se ofrecen en el supermercado, una de las compras más comunes que se realiza son los refrescos, jugos, yogurt, gaseosa, agua, etc. Los cuales se miden a partir de las unidades propias de la capacidad que llenan un determinado empaque. A partir de esta situación se pretende que el estudiante sea capaz de elegir la forma más conveniente de comprar dichos productos en cuanto a precio y cantidad; esto a partir de la manipulación de unidades de medida no convencionales y de la comparación entre diferentes capacidades, donde se establezcan relaciones y diferencias con el concepto de volumen.

- Durante el desarrollo de las actividades debe tenerse en cuenta que existe poca exactitud (depende de quien mide) y poca precisión (depende del instrumento) al realizar las medidas. Ello se debe a la acción de llenar un vaso de agua y vaciarlo en una botella o viceversa, al regarse el agua o al llenar los recipientes (botellas y vasos) más o menos de la marca que tienen los mismos, al igual que si tienen una superficie plana para apoyarlos o por el contrario los observan cuando se mueve el agua

7.3.2. Situación 2. Lanzamiento de una nueva presentación de azúcar al mercado.

Propósito: Comparar el volumen de diversos empaques utilizando instrumentos de medida convencionales y no convencionales.

Descripción de la situación: Con esta situación problema se pretende que el estudiante mida el volumen de los diversos empaques que se le entreguen, utilizando unidades convencionales y no convencionales, como también haciendo uso de lo procesos de estimación propios dentro de la medida de dicha magnitud, esto debido a que algunas unidades de medida no son conmensurables con el objeto a medir y se hace necesario una medida aproximada del volumen de los empaques.

Motivo: Lanzamiento de un nuevo empaque de azúcar en diferentes presentaciones.

Materiales:

Cajas de diferentes dimensiones.
Vasos
Canicas
Regletas de un centímetro cúbico y dos centímetros cúbicos.
Papel y lápiz

- **ESTÁNDARES RELACIONADOS:** Los Estándares del pensamiento métrico y sistemas de medida relacionados en esta situación son:

8º a 9º	Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados

Con el desarrollo de esta situación se busca que el alumno se aproxime hacia el concepto de volumen y hacia las medidas de este a través de la utilización de diversas unidades de medida (convencionales y no-convencionales) sobre objetos concretos como lo son: cajas y vasos. También se pretende, que bajo el conocimiento de este concepto, el sujeto esté en la capacidad de establecer comparaciones de tipo económico que lo lleven a tomar decisiones a lo hora de realizar una compra.

Actividad 1:

En la actividad 1 se pretende que el alumno tome cada una de las unidades de las que dispone (cubo, esfera y alargada) y realice una medida directa o indirecta sobre el volumen total de los empaques de azúcar, ya sea mediante el llenado completo de estas o a través de la implementación de una estrategia que le permita calcular el número de unidades cúbicas que llenan cada uno de los empaques. Es importante que dicha información sea consignada en la siguiente tabla y arroje resultados muy similares:

Tipo de Empaque / Presentación del azúcar	CAJA A	CAJA B	CAJA C
Esfera	115-120	18	54-55
Cubito	360	40	125-127
Alargada	180	20	63-65

Con la información anterior el alumno se dará cuenta que al llenar la cajas con cubos y alargadas es más preciso medir el volumen de dichos empaques, pues no quedarán muchos huecos entre una unidad con otro; mientras que al llenar las cajas con esfera habrá más espacios que corresponden a una parte del volumen que queda sin llenar. Sin embargo, es importante que el estudiante llegue a la conclusión de que ninguna de las presentaciones de azúcar llenan completamente el volumen de los empaques pues los espacios que quedan, después del llenado, pueden cubrirse utilizando por ejemplo arena o agua.

Actividad 2:

Con la segunda actividad se busca que el alumno relacione los precios de cada presentación de azúcar con los diferentes empaques de los que dispone (Caja A, Caja B y Vaso C), obteniendo los siguientes resultados:

Precio al llenar / Presentación del azúcar	CAJA A	CAJA B	CAJA C
Esfera	$4370 - $4560	$684	$2052- $2090
Cubito	$16200	$1800	$5625- $5715
Alargada	$13140	$1460	$4599- $4745

Ante la pregunta: ¿cuánto cuesta la caja B con la presentación de azúcar cubito? Se espera que el alumno determine un costo de $1800.

También, si al dirigirse al supermercado se observan las tres presentaciones de azúcar en la caja A, el alumno se dará cuenta que es más conveniente adquirir la caja A de azúcar con la presentación en forma de esfera, pero lleva más azúcar si adquiere la caja A en cubitos. Si la presentación de azúcar viene en el vaso C, la forma más conveniente de adquirirla es en esfera, pero llevaría más cantidad con los cubitos.

Sin embargo es importante que el estudiante se dé cuenta que la forma más económica de llevar el azúcar es en el vaso C y con la presentación de esfera.

Actividad 3:

Según las preguntas planteadas se espera que el alumno llegue a las siguientes respuestas:

- Si una caja tiene 21 unidades de azúcar alargada y 11 unidades de azúcar cubo su costo es $2028.
- Si una empaque de azúcar cuesta $8870 puede contener aproximadamente 234 unidades de azúcar esférica ó 197 unidades de azúcar cubo.
- Si un empaque tiene 3,2cm de ancho, 4,8cm de largo y 3,2 cm. de alto, dicho empaque contiene aproximadamente 36-38 cubos de azúcar.

Para encontrar la primera y segunda respuesta, el alumno simplemente debe aplicar el algoritmo de la multiplicación o la división entre el tipo de azúcar y el precio de cada una. Por el contrario, para obtener la tercera respuesta es necesario que el alumno encuentre el volumen del empaque y determine el número de unidades cúbicas que llenan aproximadamente este volumen.

Lanzamiento de una nueva presentación de azúcar al mercado.
Guía del estudiante

Materiales

Caja A
Caja B
Vaso C
Canicas
Regletas de 1 y 2 unidades

La empresa "Dulcecitos" desea lanzar una nueva presentación de azúcar al mercado y busca determinar cuál es el mejor empaque para cada una de las tres presentaciones que se ofrecen:

- Azúcar esferita
- Azúcar cubo
- Azúcar alargada

Los empaques que se ofrecen son:

- Caja A
- Caja B
- Vaso C

Actividad 1

Toma cada uno de los recipientes y llénalos con las diferentes presentaciones de azúcar. Consigna tus datos en la siguiente tabla:

Tipo de Empaque / Presentación del azúcar	CAJA A	CAJA B	CAJA C
Esfera			
Cubo			
Alargada			

a. ¿Con cuantos… azúcar en esferas llenas cada una de las presentaciones: caja A, caja B y vaso C?

____

____

b. ¿Con cuantos… azúcar en cubos llenas cada una de las presentaciones: caja A, caja B y vaso C?

____

____

c. ¿Con cuál de las anteriores presentaciones fue mas preciso llenar cada uno de los empaques ¿ y ¿Por qué?

____

____

d. ¿Al llenar cada uno de los empaques con cuál de las presentaciones se llenó el volumen de estos?

____

____

Actividad 2

Consigna en la siguiente tabla los precios que corresponden a cada presentación:

Precio al llenar / Presentación del azúcar	CAJA A	CAJA B	CAJA C
Esfera			
Cubo			
Alargada			

Con la información anterior contesta los siguientes interrogantes:

a. ¿Cuánto cuesta la caja B con la presentación de azúcar cubo?

____

____

b. Si en el supermercado observaste las tres presentaciones de azúcar en la caja A ¿Cuál saldría mas económica para comprar? Y ¿Con cuál de las presentaciones llevarías más azúcar?

____

____

c. Si las presentaciones de azúcar vienen en el vaso C ¿Cuál es la más económica? Y ¿Con cuál de las presentaciones llevarías más azúcar?

____

____

¿Con cuál de las tres presentaciones puedes obtener más cantidad de azúcar por menos precio?

____

____

Actividad 3

a. Si a una caja le caben 21 unidades de azúcar alargada y 11 unidades de azúcar en cubo ¿Cuánto cuesta la caja con azúcar?

____

____

b. ¿Cuántas esferas de azúcar y cuántos cubos de azúcar caben en un recipiente si el costo es de $8.870?

____

____

c. Suponga que una caja tiene 3,2 cm. de ancho y 4.8 cm. largo y 3.2 de alto ¿Con cuántos azúcar cubo puedo cubrir el volumen de la caja?

____

____

d. Observe cuidadosamente los empaques de presentación que lanzarán al mercado para comercializar el azúcar. Luego responde la siguiente pregunta: ¿Cuánta cantidad le falta al empaque A para ser igual al empaque B o al empaque C?

____

____

7.3.3. Situación 3. relaciones entre las magnitudes capacidad y volumen.

Objetivo: Identificar las diferentes unidades de medida utilizadas para el volumen y la capacidad, diferenciándolas de las unidades del peso.

Descripción:

Teniendo presente la ejecución de las anteriores situaciones, las cuales hacían énfasis en la medida y estimación de las magnitudes volumen y capacidad y su relación con los contextos económicos, se pretende que el estudiante a través de esta situación establezca las posibles relaciones existentes entre las magnitudes volumen y capacidad diferenciándolas, e identificándolas en diferentes contextos.

Con el desarrollo de esta situación, se espera que el estudiante tenga los conocimientos básicos para diferenciar en una situación determinada, cuando interviene la magnitud volumen, la capacidad u otras magnitudes.

Materiales:

Guía para el estudiante,
Cubos de cartulina de: uno, cinco y diez centímetros de arista.
Empaques de galletas.

- **ESTÁNDARES RELACIONADOS:** Los Estándares del pensamiento métrico y sistemas de medida relacionados en esta situación son:

8º a 9º	Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

Al finalizar las actividades de la situación, serán puestos en común los resultados obtenidos por cada grupo de estudiantes. Varios de ellos tendrán la posibilidad de exponer las razones por las cuales su respuesta es correcta, como también exponer las razones por las cuales no lo es.

Se establece con ellos las semejanzas y diferencias entre las magnitudes abordadas, volumen y capacidad; adicionalmente se muestra el significado de las medidas plasmadas en algunos empaques.

El proceso de evaluación es permanente, durante el desarrollo de las actividades se registran las observaciones e inquietudes que expresan los estudiantes en relación con los conceptos abordados, se registran sus intervenciones cuando se ponen en común los resultados y finalmente se reciben las guías desarrolladas con las respuestas, para establecer con estas que tanto se acercan a sus conocimientos.

En este proceso, se establecen acuerdos conjuntos sobre los conceptos que presentaban alguna inconsistencia o se presentan como errados.

En esta situación problema se pretende, encontrar relaciones de equivalencia, que permitan al alumno identificar las unidades de volumen y capacidad en diferentes productos observados en tiendas y supermercados, como por ejemplo reconocer que las unidades de una gaseosa están en litros y de una caja de jugo está en cm^3.

Actividad 1:

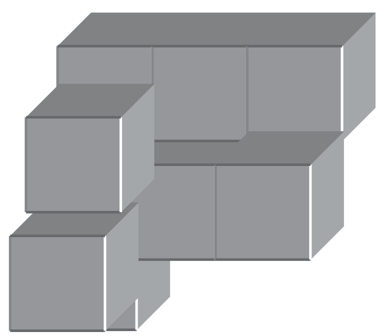
Para esta actividad se busca que los alumnos comparen un litro de agua con un cubo de 1 dm de arista, experimentando y comprobando que dicho litro equivale a 1 dm^3, lo cual permite que los estudiantes comprendan como la capacidad y el volumen están relacionadas y cómo dichas unidades pueden estar inmersas dentro de actividades de la vida diaria.

Actividad 2:

Con relación a las preguntas propuestas para esta actividad se espera que los alumnos lleguen a las siguientes soluciones: Para responder la pregunta a, los estudiantes deben colocar en la base del cubo de 5 cm. de arista, cubos de 1 cm. de arista hasta cubrirla y luego multiplicar dicha medida por la altura, obteniendo como resultado 125 cubos de 1 cm. de arista o 125 cm^3.

Hay otros procesos que pueden ser realizados por los estudiantes como por ejemplo utilizar la fórmula del volumen del cubo (L^3), como también llenar totalmente el cubo de 5cm de arista con los cubos de 1cm de arista, obteniendo como resultado los 125 cubos.

La pregunta **b**, es similar en su solución a la pregunta **a**, se introducen cubos de 5 cm. de arista en un 1dm^3, deduciendo que en este caben 8 cubos de 5 cm. de arista. De igual forma los alumnos pueden realizar diferentes procesos, como los anteriormente nombrados, se espera que utilicen el llenado del volumen o apliquen la fórmula requerida. (ver figura).



Para dar respuesta a la pregunta **c** se deben tener en cuenta las respuestas dadas ante las preguntas **a** y **b**, pues dicha información simplifica el proceso de medición, ya que los alumnos se darán cuenta que al multiplicar la cantidad de cubos que cubren el volumen del cubo de 5cm de arista (125 cubos) entre la cantidad de cubos de 5cm de arista que cubren el cubo de 1decímetro de arista (8 cubos) se obtiene la respuesta correcta (1000 cubos de 1cm de arista).

Los alumnos no sólo pueden utilizar este procedimiento, también pueden realizar el dibujo de los cubos, utilizar fórmulas para hallar el volumen de éste o recurrir al llenado del ancho, alto y largo del cubo.

Para obtener la respuesta a la pregunta **d** se espera que los alumnos deduzcan que al multiplicar el área de la base por la altura, el volumen de un cubo de 1 m de arista corresponde a 1000 cubos de 10 cm. de arista, ya que el área de la base del cubo se llena con 100 cubos de 10 cm. de arista y su altura se llena con otros de 10 cubos de 10 cm. de arista.

Para esta actividad, se debe hacer un acompañamiento donde se observen los diferentes procesos que los alumnos realizan, de tal forma que éstos generalicen la fórmula del volumen del cubo, identifiquen sus dimensiones, y realicen conversión de unidades como se observa en la siguiente tabla:

Medida de la arista del cubo	Volumen en cm^3	Volumen en litros
1 cm.	1	1/1000
5 cm.	125	¼
10 cm.	1000	1

Actividad 3:

En la tercera actividad los alumnos deben identificar cuerpos de diferentes formas que tengan igual volumen e igual capacidad. Por lo tanto, se espera que armen dos cuerpos con 10 cubos de 5 cm. de arista cada uno, comprobando que a pesar de su forma el volumen es igual y equivale a 1250 cm^3; del mismo modo se podrá encontrar que su capacidad es de 1 ¼ de litros. Como ejemplo de esta actividad los alumnos nombrarán objetos de igual volumen y diferente forma, como los empaques de tetrapak de jugos naturales y una botella de yogurt.

Actividad 4:

En la cuarta y última actividad de esta situación problema, se quiere que los estudiantes discriminen las magnitudes peso y volumen en diferentes situaciones de la vida diaria. Esto permitirá que los alumnos identifiquen cómo en los empaques de papas, rosquitas, galletas (mecato) se trabaja con el peso y en las cajas como las de jugo, leche, crema dental, entre otras, se emplea el volumen, en su mayoría donde vienen empacados los líquidos.

Los estudiantes deben realizar comparaciones entre las envolturas que se utilizan para empacar los productos y las unidades en las que se mide, justificando por qué se mide el peso, el volumen o la capacidad. Por ejemplo, explicar que en un empaque de galletas se trabaja con el peso, (en el sentido común) ya que se mide la cantidad de masa que hay en ella.

Para esta situación problema, también se pueden agregar actividades como las de comparar las dimensiones de los empaques de los productos, la realización de un nuevo empaque para ser presentado por sus compañeros, como también las unidades que se utilizarían para el producto que se piensa envolver. De esta forma se puede observar la comprensión que obtuvieron los estudiantes en la realización de las diferentes actividades.

Relaciones entre las magnitudes capacidad y volumen
HOJA PARA EL ESTUDIANTE

Materiales

Cubos de 1 cm. de lado
Cubos de 5 cm. de lado
Cubos de 1dm de lado
Empaques vacíos de galletas

Actividad 1

De acuerdo con las dos situaciones realizadas anteriormente se hace necesario observar e identificar la relación de equivalencia entre las unidades de capacidad y las unidades de volumen.

Se construye un cubo de 1 dm arista, luego se deposita en él, cierta cantidad de agua (para ello es necesario sellar el cubo con parafina), encontrando así que en $1dm^3$ cabe 1 litro de agua.

Actividad 2

Cada uno de los grupos tendrá los siguientes materiales

- 1 Cubo de 10 cm. de arista
- 10 cubos de 5 cm. de arista
- 1 cubo de 1 cm. de arista

Y contesta los siguientes interrogantes:

a. ¿Cuántos cubos de 1 cm. de arista caben en un cubo de 5 cm. de arista?

____

____

b. ¿Cuántos cubos de 5 cm. de arista caben en el cubo de 10 cm. de arista?

____

____

c. ¿Cuántos cubos de 1cm. de arista caben en el cubo de 10 cm. de arista?

____

____

d. ¿Cuántos cubos de 10 cm. de arista de cabrán en un cubo de 1 m de arista?

____

____

Actividad 3

Con todos los cubos de 5 cm. de arista, arma un cuerpo cualquiera y dibújalo. Luego arma otro cuerpo y dibújalo.

a. ¿Cuál es el volumen de cada cuerpo? En cm^3 y en litros.

b. ¿Qué diferencia encuentras entre ellas?

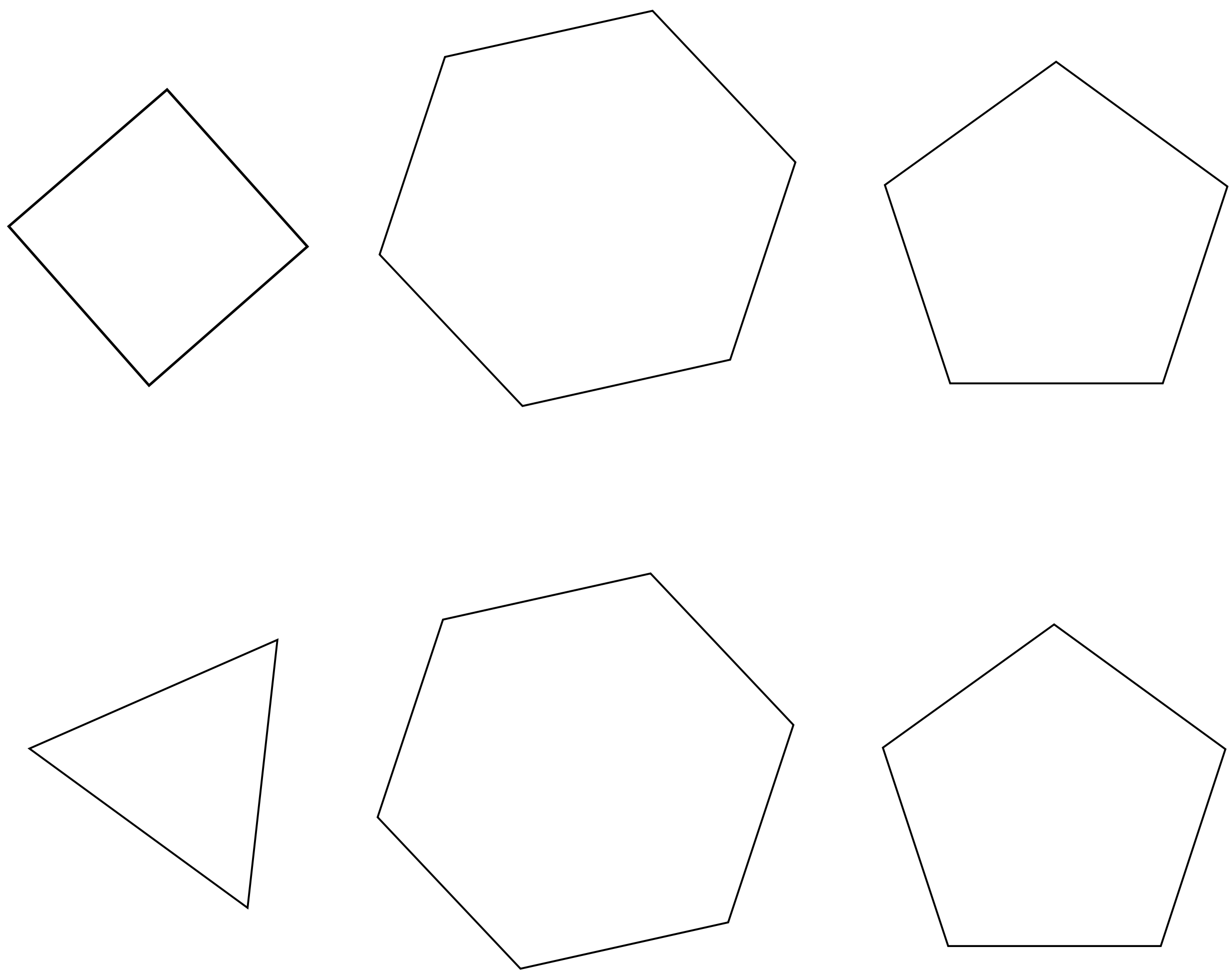
c. Escribe dos objetos que encuentres en tu alrededor que tengan el mismo volumen pero diferente forma.

Actividad 4

Observa el empaque que tienes:

a. Determina, según las unidades que vienen escritas en el empaque ¿qué es lo que se esta midiendo?

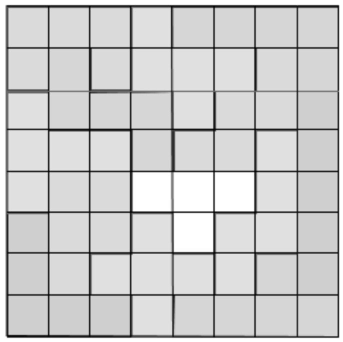
b. ¿Cuál sería el volumen de un empaque de galletas, cuando está vació?

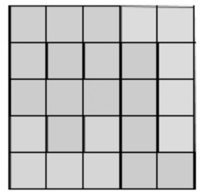


ANEXO: Hoja para el trabajo situación 1: midiendo con reglas.

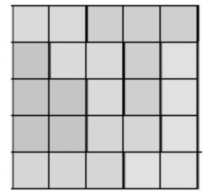
λ																	λ
λ																	λ
β						β						β					
β						β						β					
α	α												Regletón				
α	α												Regletón				
λ																	λ
λ																	λ
β						β						β					

ANEXO: Resultados elaborados por alumnos del grado 8º.

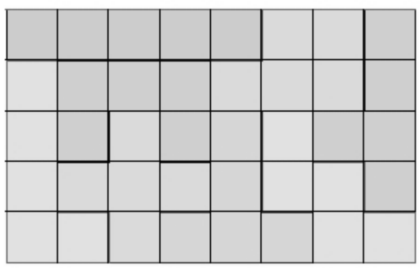


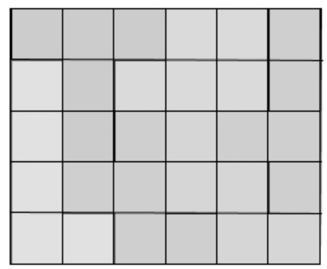


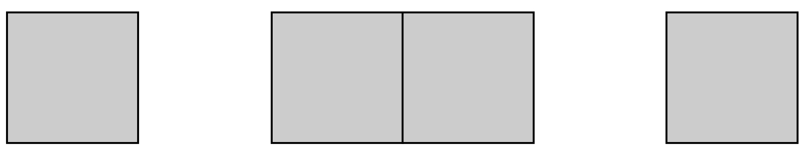
cua1

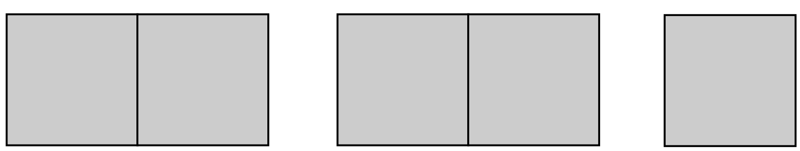


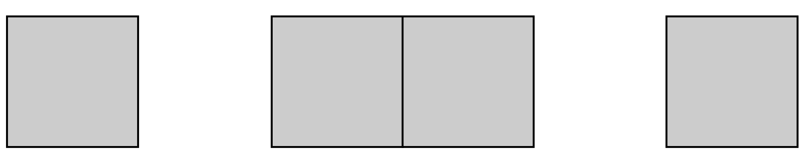
cua.2

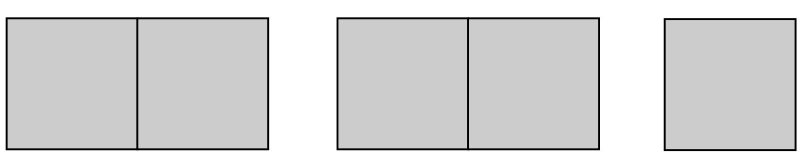


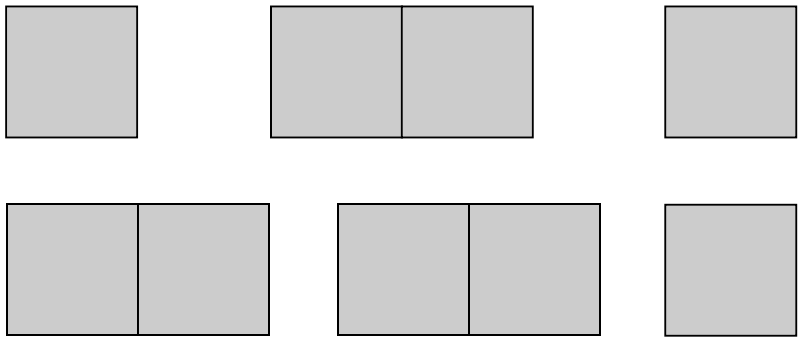


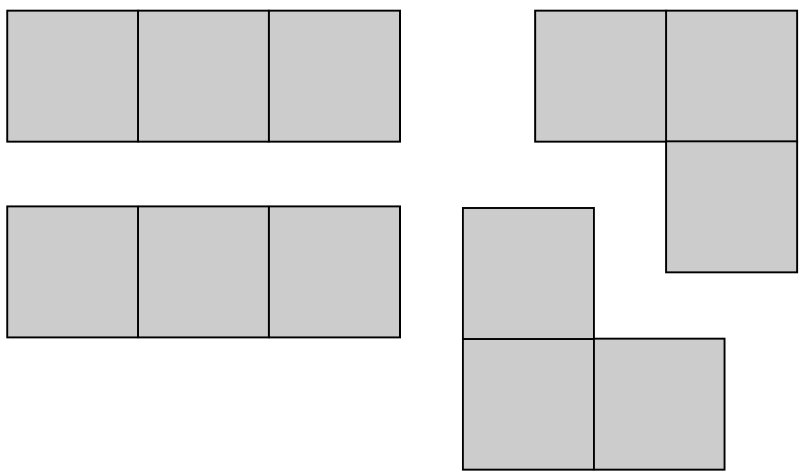


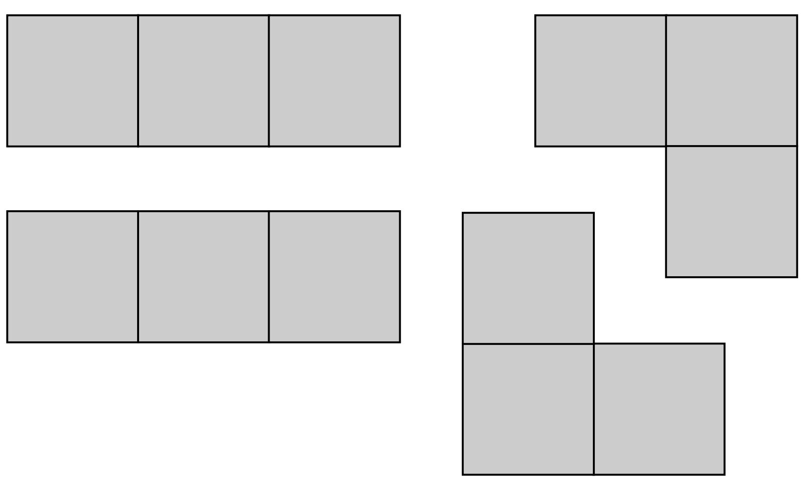




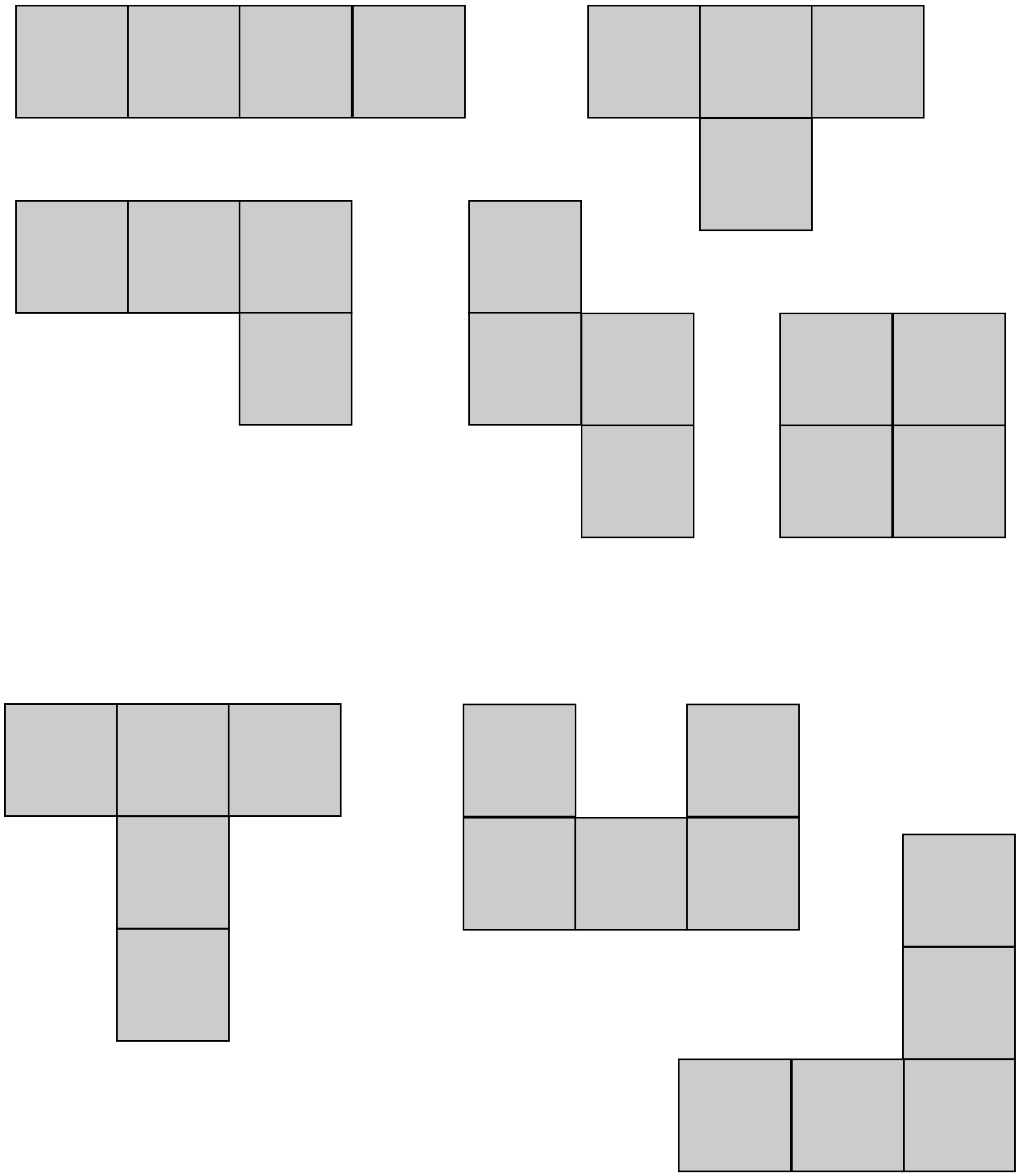


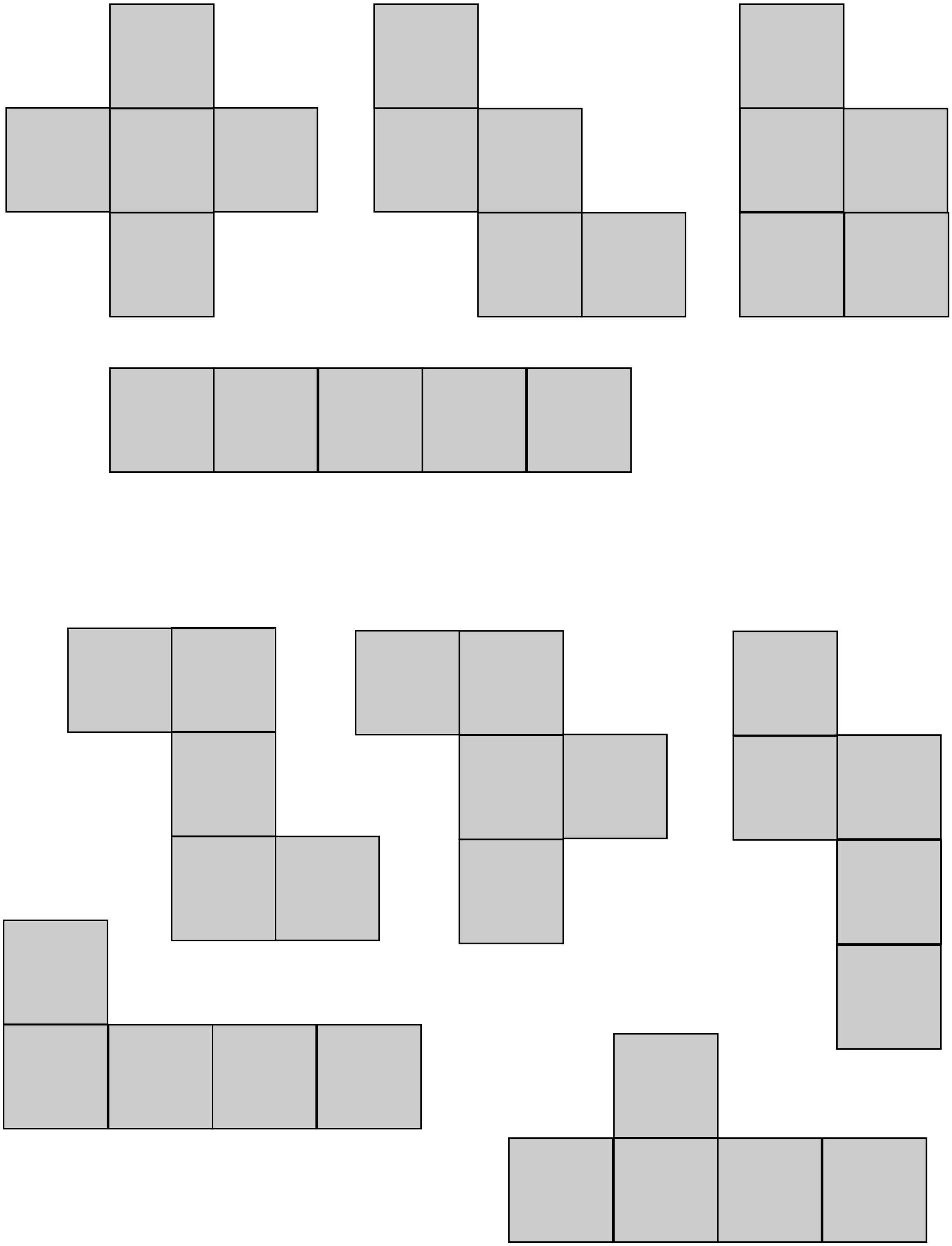




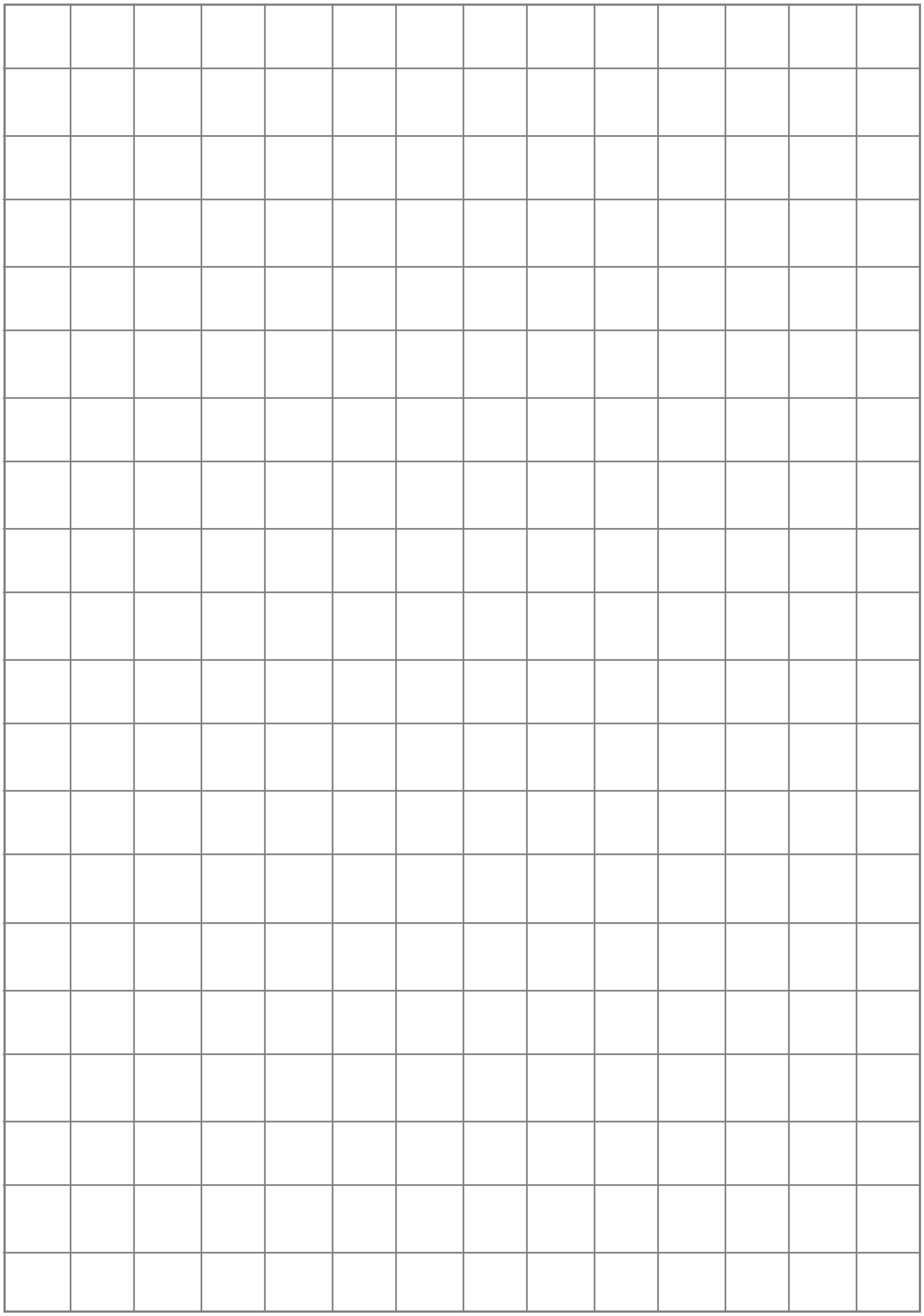


ANEXO: Plantilllas para el trabajo con los poliminós.





ANEXO: Maya para elaborar teselados con poliminós.



Referencias Bibliográficas

ARTIGUE, M. DOUADY, R. MORENO, y L. GOMEZ, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática,"una empresa docente*". México: Grupo editorial Iberoamericana, pp, 33-59.

ASOCOLME, (2002). Asociación Colombiana de Matemáticas Educativas, *Estándares Curriculares para Matemáticas*. Cuadernillos de Matemáticas Educativas, Nº 5, Bogotá: Gaia.

BACHELARD, G. (1993). *La formación del espíritu científico*, México: siglo XXI,

BOURBAKI, N. (1972). *Elementos de Historia de las Matemáticas*, versión española de Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial.

BOYER, C, (1949). The History of the Calculus and its Conceptual Development. New York: Dover Publications.

BOYER, C. (1994).*Historia de la Matemática*. (Tercera reimpresión),Madrid: Alianza Editorial.

BROUSSEAU, G. (1993). *Fundamentos y método de la didáctica de las Matemáticas*, en: Lecturas de didáctica de las Matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. Traducido de Fondements et méthodes de la didactique des mathematiques, Recherches en didactique des mathematiques. Pp 33-115.

BRUOSSEAU, G. (1988). *Los diferentes roles del maestro*, conferencia pronunciada en la UQM, 21 de enero, Canadá. Traducción del francés de María Emilia Quaranta. p.p. 65-94.

CAMPBELL, N. (1997). *Medición.* En: Sigma el mundo de las Matemáticas. Tomo 5. pp. 186-201.

CAMPOS, A. (1994). *Introducción a la Lógica y la Geometría Griegas, Anteriores a Euclides.* Bogotá: U. Nacional de Colombia.

CASTRO, E. (2000). *Estimación Cálculo y Medida.* Matemáticas: cultura y aprendizaje, Nº 9., Madrid: Síntesis.

CHAMORRO, C. (1991). *El Problema de la Medida*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, Nº 17., Madrid: Síntesis.

COLLETTE, J. P. (1986). *Historia de las Matemáticas*, I, Madrid: Siglo XXI.

COLOMBIA: Instituto colombiano para el fomento de la educación superior (ICFES), (2001). Informe de resultados de las pruebas de Matemáticas aplicadas en los grados 3º,5º,7º y 9º en los municipios de Antioquia, 1998-2000. Informe preparado por Pedraza Patricia y Rodríguez Nidia. Bogotá.

COLOMBIA: Ministerio de educación nacional (MEN), (1997). *Análisis y Resultados de las Pruebas de Matemáticas*, *TIMSS*. Santa fe de Bogotá.

COLOMBIA. (MEN). (2003). *Estándares Básicos de Matemáticas.* Santa fe de Bogotá.

COLOMBIA. (MEN). (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

COLOMBIA: (MEN-ICFES), (2003a). *Evaluar para transformar*, subtitulado, aportes de las pruebas SABER al trabajo en el aula. Bogotá.

COLOMBIA: (MEN-ICFES). (2003b). *Matemáticas escolares, Aportes para orientar procesos de innovación*. Bogotá.

COLOMBIA: (MEN-ICFES), (2003c) Y DEPARTAMENTO DE ANTIOQUIA: SECRETARIA DE EDUCACION Y CULTURA. *Informe de resultados evaluación de la Educación Básica pruebas de lenguaje y Matemáticas grados 3, 5, 7 y 9,* aplicadas en el año 2002. Bogotá.

COLOMBIA: (MEN-ICFES), (2002). *Cuadernillos de Resultados Pruebas Saber para Antioquia*. Bogotá.

CRUMP, T. (1993). *La Antropología de los Números*. Madrid: Alianza Universidad.

DANTZING, T. (1971). *El Número Lenguaje de la ciencia*. Buenos Aires: Habbs Suramérica S A.

DE GUZMAN, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y de las Matemáticas*, Madrid: Editorial Popular.

DE LA TORRE, A. (1993). *Anotaciones a una lectura de Arquímedes*. Medellín: Universidad de Antioquia.

DE LA TORRE, A. (2003). *La modelización del espacio y del tiempo*. Medellín: Universidad de Antioquia.

DELGADO, C. (2003). *El modelo de Toulmin y la evolución del concepto de continuo en los clásicos griegos.* en: Matemática: enseñanza universitaria, revista de la Corporación Escuela Regional de Matemáticas,U. Del Valle. XI, Dic ,N º 1,2,.

GODINO Y BATANERO. (Extraído en marzo 2004). *Medida de Magnitudes y su Didáctica para Maestros.* www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/. Cap, 1 y 2, Granada.

GUTIÉRREZ, J.M. Y VENEGAS VASCO, M, D. (2005) . Desarrollo del pensamiento métrico en la Educación Básica secundaria. Tesis de grado. U de A.

FIOL, M. L. y JOSEPH M. (1990). *Proporcionalidad Directa. La Forma y el Número*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, Nº 20. Madrid: Síntesis.

GALVES, .G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano.* Cáp. II de su tesis de doctorado. México: Instituto Politécnico Nacional de. pp. 39-49.

GETTYS, W, E. (1991). *Física clásica y moderna*, México: McGRAW-Hill.

HEATH, T. L. (1993). *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York: Dover publications.

HEATH, T. L. (1991). *A hystory of greek mathematics*. I. Oxford: Oxford University Press.

HECHT, E. (1999). *Física en perspectiva*. México: Addison Wesley Longman.

HOFMAN, J. E. (1960). *Historia de la Matemática*. México: Hispano Americana.

ICFES, 2006. INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA Grupo de Evaluación de la Educación Básica y Media, PRUEBAS SABER 2005, Marco de interpretación de Resultados. Bogotá.

JOSHUA, S. y DUPIN, J., J., (1993 a). *Introduction à la didactique des sciences el des mathematiques*. Citado por Gloria Castrillón y Luis Carlos Arboleda, En Educación Matemática, pedagogía y didáctica. Cali: Universidad del Valle. (2000).

JOSHUA, S. y DUPIN, J., J., (1993 b). *Introduction à la didactique des sciences el des mathematiques*. París, PUF, pp. 1 - 10, texto traducido y adaptado del francés por Gloria Castrillón y Myriam Vega. Cali: Universidad del Valle. (1998)

KLEIN, J. (1992). *Mathematical thought and the origin of algebra*. New York: Dover Publications.

KLINE, M. (1972). *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días*. Madrid: Alianza Editorial.

KULA, w. (1980). *Las medidas y los hombres.* Bogotá: Siglo XXI. p.p. 204-458).

LUENGO, G, R. GRUPO BETA, (1990). *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza.* Matemática: cultura y aprendizaje, N° 14, Madrid :Síntesis.

MESA BETANCUR, O. (1998). *Contextos para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las Matemáticas*. Medellín: Centro de Pedagogía Participativa.

MESERVE, B. E. (1983). *Fundamental Concepts of geometry*. New York: Dover Publication.

NEWMAN, J. R. (1994). en SIGMA; El Mundo de las Matemáticas. Barcelona: Grijalbo. 4.

OBANDO, G. y MUNERA, J. (2003). *Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización Matemática*. En: Educación y Pedagogía, No 35, XV. Medellín: Universidad de Antioquia.

OLMO ROMERO, M., MORENO CARRETERO, M.; GIL CUADRA, F. (1993).*Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Matemática: cultura y aprendizaje, N° 19, Madrid: Síntesis.

PIAGET, J. (1971). *Estudios de epistemología del espacio*. Buenos Aires: Atenea Editorial.

RAYMOND, L. W. (1997). *El método axiomático*. En, Sigma. El Mundo de las Matemáticas, Barcelona: Grijalbo. Tomo 5. p.p. 35-56.

RIBNIKOV, K. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Traducción de Concepción Valdés Castro. Moscú: Mir.

RUSSELL, B. (1997). *Los principios de la Matemáticas*. Traducción del inglés, Juan Carlos Grimberg. Santa fe de Bogotá: Espasa-Calpe, S.A Traducción de Concepción Valdés Castro.

VERGNAUD, Gerard. (2000). El Niño, Las Matemáticas y la Realidad. Mexico. Trillas.

ZULKARDI. *¿How to design mathematics lesson on the Realistic Approach*? (RME). www.nctm.org/, Extraido en noviembre 2003.