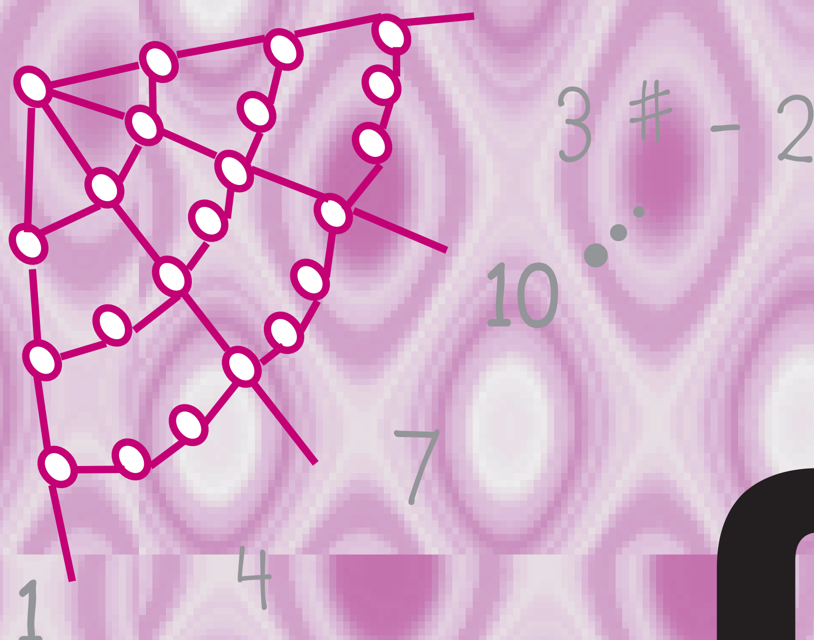
EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL:

UNA MIRADA A LA ARITMÉTICA DE LA ESCUELA

MYRIAM ACEVEDO CAICEDO
CRESCENCIO HUERTAS CAMPOS



CUADERNOS DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

2 dos

ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
ASOCOLME

gaia Grupo Editorial

EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL:

UNA MIRADA A LA ARITMÉTICA DE LA ESCUELA

Myriam Acevedo Caicedo
Crescencio Huertas Campos

Acevedo Caicedo Myriam - Huertas Campos Crescencio
EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL: **UNA MIRADA A LA ARITMÉTICA DE LA ESCUELA** / Myriam Acevedo Caicedo - Crescencio Huertas Campos - 1ed. - . Santa Fe de Bogotá, D.C., Grupo Editorial Gaia, 1999. 54p. - Colección: Cuadernos de Matemática Educativa No. 2
ISBN : 958-96440

EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL:
UNA MIRADA A LA ARITMÉTICA DE LA ESCUELA

CUADERNOS DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

dos

Myriam Acevedo Caicedo
Crescencio Huertas Campos

Profesores del Departamento de Matemáticas
y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia.

ASOCIACIÓN COLOMBIANA
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

gaia
Grupo
Editorial
Especialistas en
Publicaciones
Universitarias

COLECCIÓN:
CUADERNOS DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL:
UNA MIRADA A LA ARITMÉTICA DE LA ESCUELA

Autores:
© MYRIAM ACEVEDO CAICEDO
© CRESCENCIO HUERTAS CAMPOS

COLECCIÓN: ISBN : 958-96440
LIBRO: ISBN : 958-96440

Primera edición, 1999 200 ejemplares

DIRECCIÓN GENERAL
ASOCIACIÓN COLOMBIANA
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, ASOCOLME

DIRECCIÓN EDITORIAL,
DISEÑO GRÁFICO Y DE CARÁTULA
Pedro Enrique Espitia Zambrano
Grupo Editorial Gaia
Calle 74 No. 22-70 Bogotá
Tel. 3102668311
gaiaeditorial@gmail.com

DIAGRAMACIÓN Y EDICIÓN
Calle 74 No. 22-70 Bogotá
Tel. 3102668311
gaiaeditorial@gmail.com

IMPRESO EN COLOMBIA. 1999

Contenido

Pág.

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO UNO

EL NÚMERO NATURAL

1.1 EL NÚMERO NATURAL Y SU ESCRITURA 10

1.2 EL NÚMERO NATURAL Y EL CONTEO 16

CAPÍTULO DOS

ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA

2.1 ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA 20

2.2 EL TEOREMA DE PITÁGORAS 26

CAPÍTULO TRES

EL NÚMERO Y LA PROPORCIÓN

3.1 EL NÚMERO Y LA PROPORCIÓN 40

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 53

Introducción

El contenido de estas notas se desarrollaron en un seminario del programa RED de la Universidad de Colombia , como una propuesta de formación de docentes en servicio.

Son talleres que tienen por finalidad discutir y generar ideas en torno a las actividades para desarrollar en las aulas de clases en la Escuela Básica Secundaria. Estos están dirigidos fundamentalmente al profesor, por tanto es el quien debe valorar el momento en el curriculum y la forma como se deben readaptar, pues no es conveniente plantearlo a los estudiantes tal como aparecen Los temas tratados giran en torno a temas tan álgidos y con tantos problemas en su enseñanza como: La representación del número, el teorema de Pitágoras, la razón, la proporción y la regla de Tres.

Todos tienen un referente histórico y están acompañados de una bibliografía que se puede conseguir en nuestro medio.

LOS AUTORES.

EL NÚMERO NATURAL

CAPÍTULO uno

1.1 EL NÚMERO NATURAL Y SU ESCRITURA

Aunque los descubrimientos arqueológicos muestran como evidencia que la idea de número es anterior a los descubrimientos tecnológicos, la civilización y la escritura; en nuestra escuela, los conceptos de número, símbolo y sistema de numeración parecen confundirse, asumiéndose muchas veces como igual el número y su grafía. El compromiso educativo hace que el profesor no deba considerar la matemática como una actividad aislada de una realidad social y cultural, y si en la actualidad ésta ya no se define como la ciencia de la magnitud y el número, la medición y el número son herramientas intelectuales cuyo dominio potencia a un individuo para participar en el desarrollo de su sociedad, si bien la noción básica de número es un universal, la forma concreta de abordarla no ha sido la misma en las diferentes culturas, por tanto podemos afirmar que han existido muchos mundos numéricos, organizados como verdaderos programas simbólicos, los cuales han evolucionado por intercambio o como necesidad de dar respuesta a diversos interrogantes.

Las reflexiones anteriores nos conducen nuevamente a examinar la evolución del concepto de número, dado a través de diferentes épocas y culturas, lo mismo que su representación simbólica organizada en lo que conocemos como "sistema de numeración".

1. En la representación de los números naturales, los egipcios usaron los siguientes símbolos:

   | para las unidades
   ∩ para las decenas
   1 para las centenas
   ¶ para las unidades de mil
   (para las unidades de diez mil
   Ø para las unidades de cien mil
   * para las unidades de millón

   a) ¿Cómo se escribiría el número 2'351.426 si el número 1.435 se representa así? :

      ¶1111∩∩∩ |||||

   b) ¿Por qué se le denomina a este sistema "aditivo"?

   c) ¿Cuáles serían los inconvenientes de esta notación?

   d) Establezca analogías y diferencias con el sistema de numeración romano

2. Esta misma cultura usaba los siguientes procedimientos para multiplicar:

   a) POR DUPLICACIÓN: 14 x 35 se obtenía de la tabla sumando 70 con 140 y 280

      1 —— 35
      2 —— 70
      4 ——140
      8 ——280

b) POR DUPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN MITADES DE LOS FACTORES:
35 x 16 se obtenía a partir de la tabla sumando los números de la columna derecha que corresponden a impares de la columna izquierda es decir
16 + 32 + 512 = 560 = 35 x16

35	——	16
17	——	32
8	——	64
4	——	128
2	——	256
1	——	512

- Ensaye con algunos números los dos métodos hasta aclarar el algoritmo empleado.

- Use propiedades de la aritmética de los números naturales, para explicar por qué funcionan los dos métodos empleados.

- Reflexione sobre las posibilidades de uso en el aula, ubicando grado, requisitos y posibilidades de contribución al desarrollo del pensamiento matemático del alumno.

3. Los Babilonios usaron un sistema de numeración posicional en base 60 para escribir los números mediante el empleo de cuñas, sin embargo los historiadores han usado una adaptación a la notación actual así:

   12312 = 3x3600 + 25x60 + 12 = 3; 25; 12.
   1043/3600 = 17/60 + 23/3600 = 0.17; 23.

- Escribir en notación decimal los números dados a continuación si ellos está escritos en base 60.
  7; 31; 24; 1 0.12; 50; 49

- Escribir en notación sexagesimal los números dados a continuación si ellos están escritos en notación decimal: 43251, ½, 2/3, 7/5

- En la tablilla Plimpton 322 todos los números se encuentran escritos en base 60
  1; 59 2; 0 2; 49 1.59 0.15
  hacen parte del primer renglón, se afirma que los tres primeros números forman una terna pitagórica y el último número es el cuadrado de la razón de los dos últimos números es eso cierto?

- Existen analogías con la escritura egipcia y la romana?

- Cuál es la diferencia entre el sistema de numeración egipcio y el babilonio'

- Si la escritura decimal del número 3/7 es 0.428571428571... cuál sería la escritura en base 5 del

- ¿Qué fracción representa el número decimal periódico 3.499999...?

- ¿Qué elementos se deberían tener en cuenta para formar un sistema de numeración?

JUEGOS

1. Una persona piensa en un número de tres cifras, propóngale que encuentre la suma de las cifras y que esta suma la reste del número pensado, pídale que tache una cifra y que le comunique las restantes, usted estaría en capacidad de adivinar la cifra tachada ,si previamente ha observado que sucede con un número cuando realiza esta operación. Analice el juego y examine qué propiedad aritmética lo sustenta.

2. Proponga que alguien piense un número de tres cifras que no termine en cero, que coloque estas cifras en orden contrario, hecho esto debe restar del número mayor el menor y la diferencia obtenida sumarla con ella misma, pero con las cifras escritas en orden contrario, el número resultante es mil ochenta y nueve. ¿Por qué?. Hay casos donde el juego no funcione?.

3. Encuentre las cifras escondidas.

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & & & ? & 1 & ? \\
 & & & \times & 3 & ? & 2 \\
\hline
 & & & & ? & 3 & ? \\
 & & 3 & ? & 2 & ? & \\
 & ? & 2 & ? & 5 & & \\
\hline
 & 1 & ? & 8 & ? & 3 & 0
\end{array}
$$

4. Si las letras representan dígitos, encuentre soluciones en cada operación

$$\begin{array}{r} AB \\ BA \\ \hline CC \end{array} \qquad \begin{array}{r} UNO \\ +DOS \\ \hline TRES \end{array} \qquad \begin{array}{r} TRES \\ +\ DOS \\ \hline CINCO \end{array}$$

5. Si un número natural se escribe en base diez las siguientes reglas de divisibilidad se cumplen

a) El número es divisible por cinco si su última cifra es cinco o cero.

b) El número es divisible por tres si la suma de las cifras es divisible por tres.

c) El número es divisible por nueve si la suma de las cifras es múltiplo de nueve

d) El número es divisible por once si la suma de las cifras que ocupan el lugar par, empezando por la última, restada de la suma de las cifras de los lugares impares es múltiplo de once.

Justifique cada una de ellas y proponga nuevas.

1.2 EL NÚMERO NATURAL Y EL CONTEO

Una aplicación fundamental del número natural está en el uso que se le da para contar los elementos distintos de un conjunto, esto es, si entre un conjunto cualesquiera y un subconjunto de los números naturales se puede establecer una correspondencia biunívoca en tal caso al conjunto se le denomina enumerable o discreto; si la correspondencia biunívoca se establece entre el conjunto $\{1,2,3,....,n\}$ y un conjunto cualesquiera A al conjunto A se le denomina finito con ene elementos o también que el cardinal de A es n.

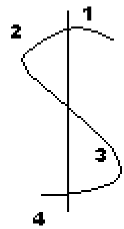
1. Dé ejemplos de conjuntos discretos y no discretos.

2. Si la distancia entre dos postes consecutivos de una cerca es de cinco metros, ¿ cuál será el número de postes necesarios para construir una cerca alrededor de un terreno triangular de veinte, treinta o cuarenta metros de lado ? será posible hacer una generalización ?.

3. Si **a** y **b** son números enteros que satisfacen la condición $\mathbf{a} > \mathbf{b} > 0$, cuántos enteros habrán entre **a** y **b** ?

4. Se construyen dos dados con los números 1, 2, 3, 5, 7 y 9, si se lanzan simultáneamente ¿ cuántas sumas diferentes se obtendrán?

5. Una línea vertical intercepta al símbolo S en tres puntos como se muestra en la figura , y dividiendo la región en cuatro partes, si se trazan nueve líneas paralelas con las mismas características ¿cuántas regiones o partes de S se determinan? Se podría inducir alguna generalidad?.



6. Si los cuatro finalistas del mundial de foot-ball jugaran todos contra todos ¿cuántos formularios diferentes podrían llenarse en donde se determine la posición final de los equipos?. ¿qué pasaría si fueran 5 finalistas? si fueran 8? si fueran n?.

7. Si al mundial asistieran 36 equipos y las reglas de juego dijeran que el campeón sería aquel con más puntaje, después de jugar todos contra todos cuantos formularios se podrían llenar con los cuatro primeros puestos?

8. Si llamamos P(36, 4) al número de formularios del ejercicio anterior, ¿qué estaría determinando el número P(n, k) y ¿cómo se calcularía? ($n > k$).

9. Si en el caso del problema 7, los formularios se llenaran con los cuatro finalistas sin importar el puesto ocupado ¿cuántos de éstos diferentes resultarían?

LECTURAS COMPLEMENTARIAS

Ardila, A. (1990) Multiplicación y división en el ábaco. Notas de Matemática No.29.Santa Fe de Bogotá.

Avila, A. & Mancera, E. (1989) Diagnóstico de habilidades computacionales y actividades para solucionar los errores. Educación matemática Vol.1-No.1 México.D.F.

Boyer, C. (1987) Historia de la Matemática. Los Orígenes Primitivos. Alianza Editorial . Madrid.

Perelman, Y. (1986) Matemáticas Recreativas. Ediciones Orbis S.A. Barcelona.

Pérez, A. & Torres, M. (1992) La singularidad del cero en el aprendizaje de los números .Epsilon No. 24. Sevilla.

Ritter, J. (1991) A cada uno su verdad: las matemáticas en Egipto y Mesopotamia. Historia de las ciencias . Michel Serres (edit.).Madrid.

Smullyan, R. (1984) ¿La Dama o el Tigre ? y otros pasatiempos lógicos. Ediciones Cátedra S.A. Madrid

ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA

CAPÍTULO dos

2.1 ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA

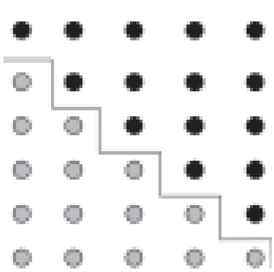
La civilización Helénica es quien aporta el carácter deductivo de la matemática, se inicia con ella la sistematización de los conceptos de número y magnitud, el acercamiento teórico al estudio de la naturaleza permite que de ella se puedan extraer similitudes sacadas de múltiples sucesos, analizadas y generalizadas para luego de esto deducir nuevas relaciones, por tanto lo que prima en esta cultura es el gusto por inquirir o preguntar, y el interés por la matemática ya no se reduce únicamente a su aplicación práctica como en Egipto y Mesopotamia. Aunque a Thales se le atribuye el establecimiento de la matemática como ciencia deductiva, fue la Escuela Pitagórica quien introdujo los conceptos matemáticos abstraídos de las impresiones sensoriales de la naturaleza , la matemática se organiza a partir de "primeros principios", adquiriendo un carácter explícitamente abstracto y surgiendo formas de organización local que comportan la deducción como criterio normativo (Moreno, L. 1991). Sin embargo el carácter de la matemática es completamente realista para los griegos, ya que el interés está centrado en el objeto de estudio que se concibe como inmutable y este no logra ser modificado por el sujeto, la actividad del sujeto no es creativa, se limita a estudiar una realidad ya dada, por ejemplo: el cielo se puede construir a base de números, pues las estrellas son unidades, puntos materiales, y el punto es una unidad con posición (la unidad es un punto sin posición).

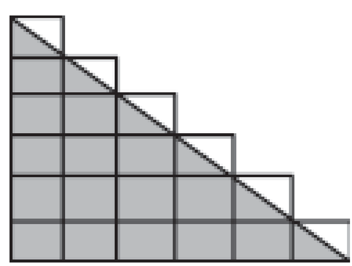
Para Aristóteles los objetos matemáticos se presentan bajo las formas de los discreto y lo continuo, el prototipo de lo discreto es el número. Número es una colección de unidades y no incluye al uno entre los números. Por otra parte el prototipo de lo continuo se encuentra en el dominio de lo geométrico, la longitud, el área y el volumen , el cual surge como una abstracción del continuo físico, es decir; las magnitudes son abstracciones, representadas geométricamente de las cosas medibles continuas.

A partir de la idea original de los pitagóricos, de representar los números naturales por puntos y formar con ellos figuras geométricas, en forma inductiva se encuentran relaciones aritméticas hoy conocidas como modelos de demostraciones "sin palabras".

El trabajo consiste en estudiar la figura y tratar de identificar las propiedades que se han querido ilustrar induciendo a partir de ella una generalidad. Tome varios ejemplos para tratar de identificar un patrón.

NUMEROS TRIANGULARES

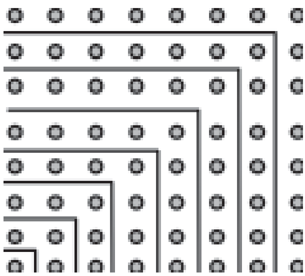
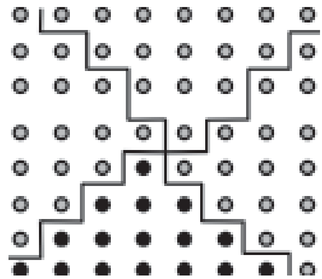




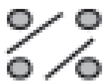
$1+2+3+4+5 = \frac{1}{2}(\,?\,)(\,?\,)$

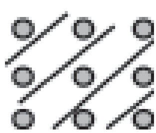
$1+2+3+4+5+....+n = \frac{1}{2}(\,?\,)(\,?\,)$

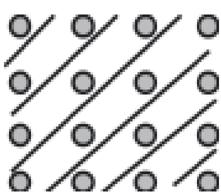
NÚMEROS CUADRADOS

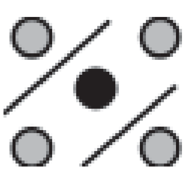
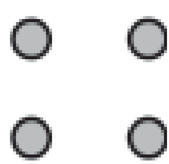
 

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = ?$

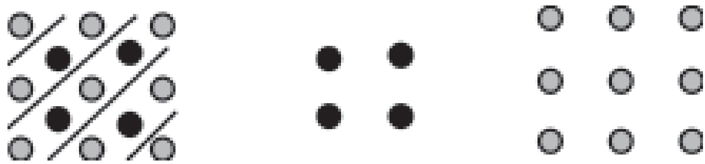
 $1 + 2 + 1 = 2^2$

 $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$

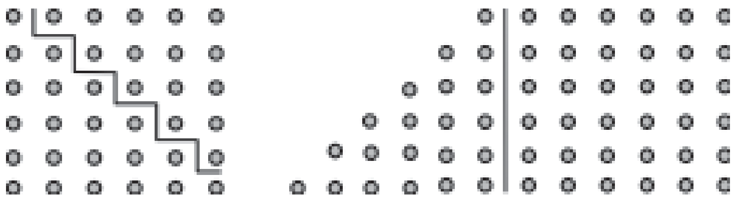
 $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$

 =  + 

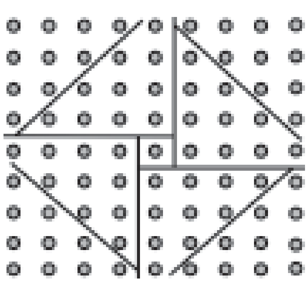
$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2$

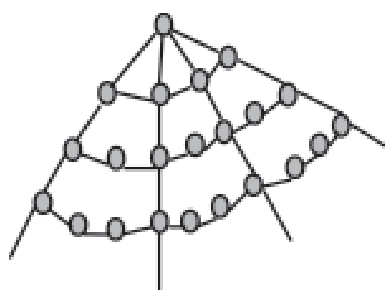


$$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2$$



$$\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n^2$$





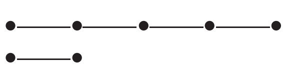
La penúltima figura muestra como ocho números triangulares mas uno forman un cuadrado, mientras que en la última figura se describe la conformación de los llamados números pentagonales que conforman la serie: 1, 5, 12, 22, etc.

Todas estos números poligonales se construyen mediante agregados de gnómones (escuadras) sucesivos a la unidad, y también se pueden obtener de la sucesión de números 1 ; 1+ (k-2) ; 1+ 2(k-2) ; 1+ 3(k-2) ; 1+ 4(k-2) ; ...donde $k > 2$ y número natural.

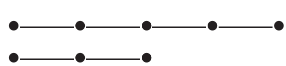
La progresión es aritmética de razón (k-2) y generan los números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales cuando k sea respectivamente 3,4, 5 y 6.

Los pitagóricos en su estudio sobre los números elaboraron una teoría conocida como de lo par e impar, la cual es ampliada por Platón y Euclides quienes hacen la clasificación siguiente: Aquel que tiene su mitad par, la mitad de la mitad par y así hasta la unidad o sea un número de la forma 2^n llamado PAR - PAR - PAR. Aquel que se puede dividir por la mitad una vez y deja un número impar como cociente o sea de la forma 2(n+1) llamado PAR- IMPAR y por último el de la forma 2^{n+1}(2m+1) llamado IMPAR- PAR pues se pueden dividir por la mitad más de dos veces dejando un número impar como cociente.

También se les llamo número primo a aquel que solo puede ser medido por la unidad , si se supone que ellos se pueden distribuir en un segmento, como por ejemplo:



1



2

4

cuatro sería un número compuesto pues tiene como medidas al uno al dos y al cuatro. Cuando dos números tenían como medida común solamente la unidad se les llamaba primos el uno con el otro, como son el 4 y el 9. Euclides y Aristóteles admitieron como primo al 2, mientras que para los pitagóricos ni siquiera era número pues así como la unidad era el principio de los números el dos era el principio de lo par.

LECTURAS COMPLEMENTARIAS

Boyer, C. (1987) Historia de la matemática. Cap. V. Jonia y los Pitagóricos. Alianza Editorial. Madrid España.

Campos , A.(1990) Trabajo Matemático de los Pitagóricos relacionados con la Geometría .VII Coloquio Distrital de Matemática y Estadística. Bogotá.

Serres, M.(1989) Gnomon: Los comienzos de la Geometría en Grecia. Elementos e laHistoria de las Ciencias. Edi. Cátedra S.A. Madrid

2.2 EL TEOREMA DE PITÁGORAS

El uso del teorema en la agrimensura, ingeniería, cálculos aritméticos y resolución de ecuaciones muestran como en las civilizaciones egipcia, babilonia, china e hindú se tenía conocimiento del teorema mucho antes de la existencia de Pitágoras, por tanto se cree que la contribución de este, al teorema que lleva su nombre se reduce a su demostración.

La inclusión de este tema en el curriculum escolar es algo que no se discute, y son muchos los artículos sobre pruebas, formas de abordaje en el aula, usos, dificultades de aprendizaje etc. sin embargo nuestra experiencia nos muestra cómo en nuestra escuela este tema es visto muchas veces descontextualizado y sin el énfasis que merece por su uso y por ser parte necesaria del bagaje cultural o científico de nuestra civilización, es así como para el educando se toma como, una fórmula más algunas veces aplicado pero carente de significado.

La importancia histórica y epistemológica del teorema nos permite plantear la necesidad de retomarlo, dedicándole tiempo a una reflexión tanto del aspecto matemático como didáctico, mirando las distintas facetas de presentación y desarrollo en el curriculum ya que se puede trabajar no sólo desde su aplicación sino también desde la aritmética el álgebra y la geometría; pues la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$ da lugar a interpretar a, b y c como números, expresiones algebraicas o longitudes.

Ternas Pitagóricas

Tres enteros positivos a, b, c forman una terna pitagórica (a,b,c) si satisfacen la igualdad

$$a^2 + b^2 = c^2$$

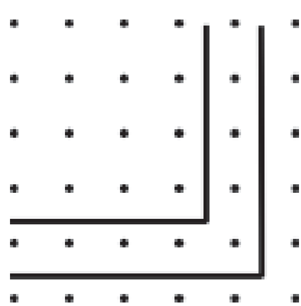
1. a) Considere los números 9, l6, 25, ..., n^2 haga las figuras para de ellas inducir la igualdad $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ ¿Cuándo se generaría una terna pitagórica ?.

   b) La sustitución de 2n+l por m^2 en la igualdad anterior lo conduce a la siguiente

$$m^2 + [½(m^2-1)]^2 = [½(m^2+1]^2$$

   úsela para determinar ternas pitagóricas. ¿Se generan todas las posibles ternas ?

2. Inducir de la figura la igualdad $(n-1)^2 + 4n = (n+1)^2$



La sustitución de n por m^2 lo conduce a la nueva fórmula

$$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$$

la cual sirve para calcular también ternas pitagóricas, ¿Genera las mismas anteriores?

3. Suponga que (a, b, c) es una terna pitagórica, luego se puede concluir que
   $a^2 = b^2 - c^2 = (b+c)(b-c)$ y la igualdad
   $u = b + c$; $v = b - c$ definirían a u y v
   como números con las siguientes propiedades:

   - $u.v$ es un cuadrado perfecto
   - u y v son ambos pares o ambos impares.
   - $u > v$; $b = ½ (u-v)$; $c = ½ (u+v)$; $a = \sqrt{u.v}$
   - $(\sqrt{u.v}, ½ (u-v), ½ (u+v))$ es una terna pitagórica.

   Estos resultados se pueden organizar en la siguiente proposición dada por Euclides
   " (a,b,c) es una terna pitagórica si y solamente si existe u y v enteros positivos $u > v$ de igual paridad tales que u.v es un cuadrado perfecto y $(a,b,c)=(\sqrt{u.v}, ½ (u-v), ½ (u+v))$".

4. Si (a,b,c) es una terna pitagórica denominaremos triángulo pitagórico al triángulo rectángulo cuyos catetos son respectivamente a, b y su hipotenusa es c.

   Determinar todos los triángulos pitagóricos que tengan por cateto a = 12 .Para ello puede usar la proposición anterior calculando todos los números u y v tales que su producto u.v sea 12 siendo u y v naturales con la misma paridad.

5. La proposición anterior sirve también para construir con regla y compás segmentos de longitud Ön , es claro que para ello hay que suponer que se satisface el reciproco del teorema de Pitágoras esto es: un triángulo es rectángulo si la medida de sus lados a, b y c satisfacen la igualdad $a^2+b^2=c^2$ siendo c la longitud del lado más largo.

   Escriba n= 24 como un producto de dos enteros u.v de la misma paridad y use las fórmulas de la proposición para construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{24}$. Repita el ejercicio para construir un segmento de longitud $\sqrt{15}$.

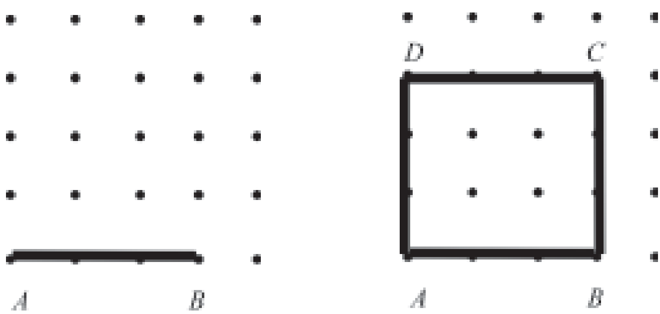
6. Como se ha podido observar en las actividades propuestas en esta sección se han usado los conceptos geométricos de área de triángulos y cuadrados, y solamente en el ejercicio anterior usamos el teorema de Pitágoras para hacer una construcción geométrica de un número no racional, pues los números que se han estado usando en el transcurso de las actividades son generalmente números naturales (o racionales).

   ¿En qué momento del curriculum escolar podrían tratarse estos temas y con qué propósitos se podrían llevar al aula?

Taller de Aula

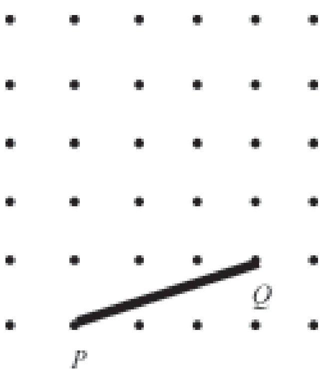
1. La figura 1(a) muestra un lado AB del cuadrado ABCD con AB = 3cms. Es fácil encontrar las posiciones de los otros dos vértices C y D como se muestra en 1(b)

Figura 1



(a) (b)

Figura 2



En la figura 2 se muestra un lado PQ del cuadrado PQRS, donde las posibles posiciones de R y S ya no son tan obvias. Analizar las siguientes figuras y determinar el área PQRS.

Figura 3

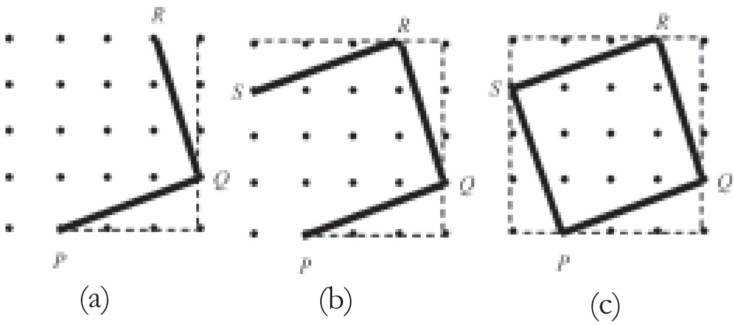
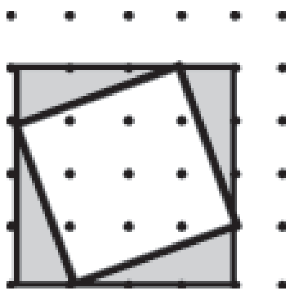
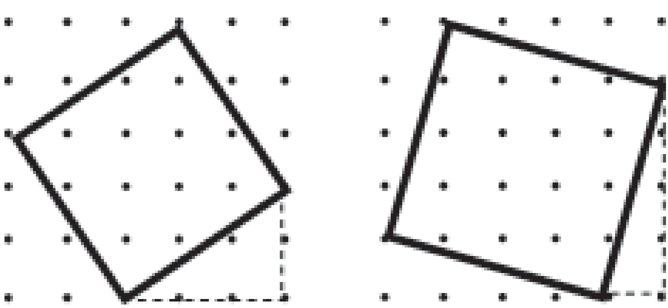


Figura 4



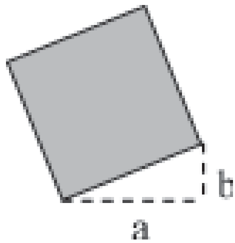
2. Usar las ideas anteriores para determinar las áreas de los cuadrados de la figura 5.

Figura 5

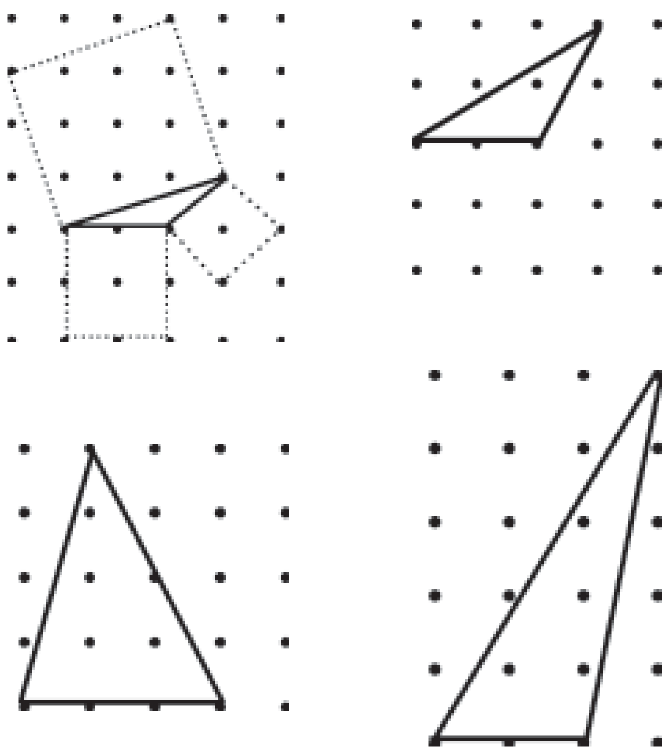


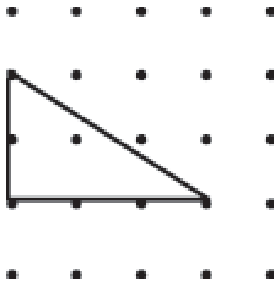
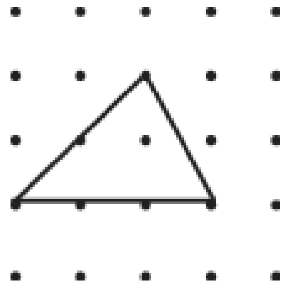
¿Esto le sugiere alguna idea para encontrar el área del cuadrado que aparece en la figura 6?

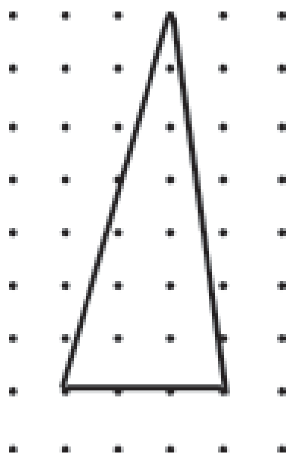
Figura 6



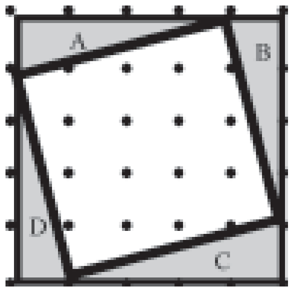
3. Para cada uno de los triángulos de las figuras siguientes; dibujar un cuadrado sobre cada lado y encontrar el área de cada uno de ellos.



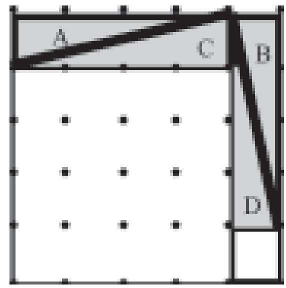
 



4. Copiar la figura 7a sombree los triángulos A, B, C y D. Corte los triángulos y el cuadrado. Forme un rectángulo A y C, similarmente con los triángulos B y D; coloque las piezas de papel como se muestra en la figura 7b. Compare éste con el diagrama original y explique como ésto demuestra el teorema de Pitágoras.



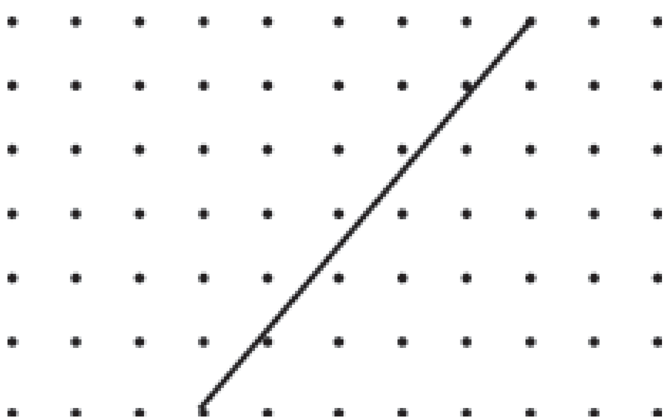
(a)



(b)

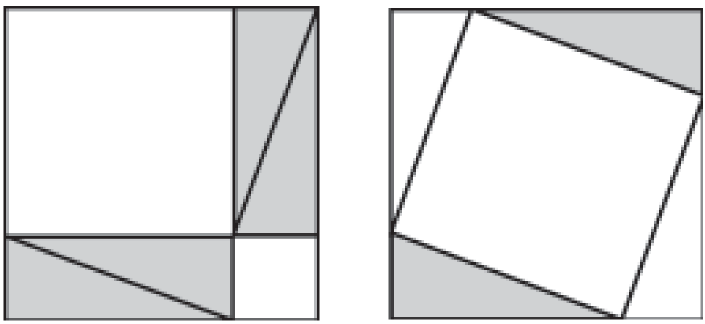
Figura 7

5. Un triángulo rectángulo tiene cuadrados sobres sus lados de áreas $50cm^2$, $18cm^2$ y $68cm^2$. Un lado de este triángulo se ilustra en la figura. Cópiela y dibuje el cuadrado sobre el lado dado, calcule el área de este cuadrado y marque el tercer vértice del triángulo (recuerde que los otros dos lados deben ser lados de los cuadrados con áreas dadas).

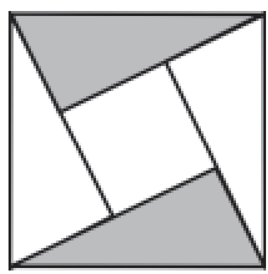


Demostraciones sin palabras

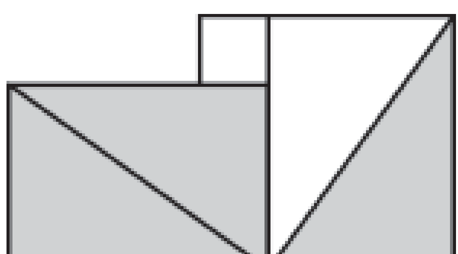
Observe las figuras y explique por qué cada una de ellas es una demostración del teorema de Pitágoras (si prefiere construya las figuras en una hoja de papel, corte y doble).

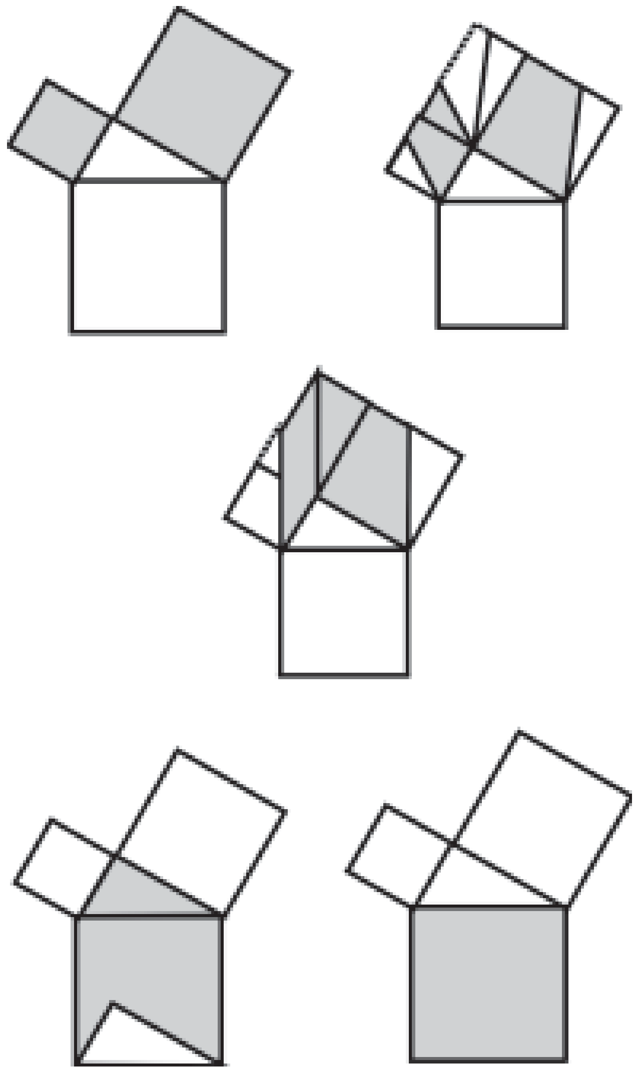


Teorema de Pitágoras I

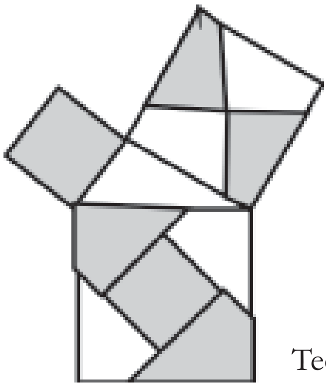


Teorema de Pitágoras II

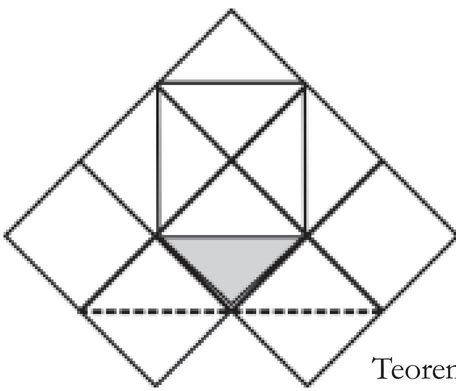




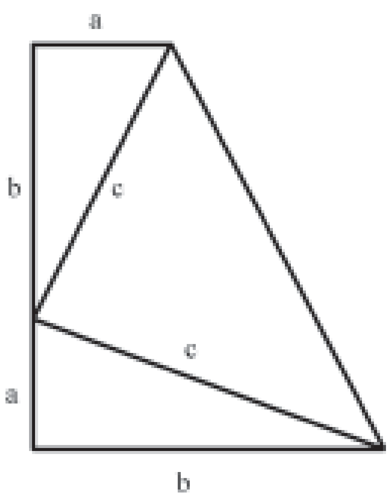
Teorema de Pitágoras III



Teorema de Pitágoras IV

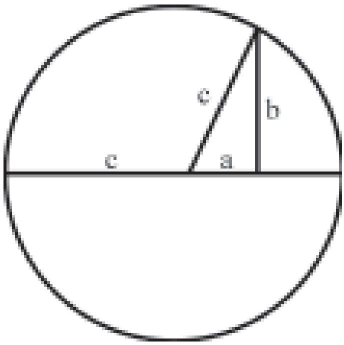


Teorema de Pitágoras V



Partir del Area del Trapecio $A=\frac{1}{2}(a+b)^2$

Teorema VI



Partir de$(c+a)/b = b/(c-a)$

Teorema VII

LECTURAS COMPLEMENTARIAS

Meavilla S. V. (1989). Dos demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. Suma 3.

Rothbart A. & Paulsell B.(1974). Números Pitagóricos: una fórmula de fácil deducción y algunas aplicaciones geométricas. The Mathematics Teacher vol 67 Nº3 (NCTM).

Campos A.(1990). Geometría Griega antes de Euclides Trabajo Matemático de los Pitagóricos relacionado con la Geometría. VII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística .Santa Fe de Bogotá.

EL NÚMERO Y LA PROPORCIÓN

CAPÍTULO tres

3.1 EL NÚMERO Y LA PROPORCIÓN

Proclo filósofo del siglo V de nuestra era afirma que a Pitágoras se le deben dos descubrimientos matemáticos: la construcción de los poliedros regulares y la teoría de proporciones, aunque exista seguridad que este aprendió en la Mesopotamia las medias aritmética, geométrica , la subcontraria y la armónica. No hay seguridad si el estudio de las proporciones formó parte de la teoría de números Pitagórica y tampoco cuando las cantidades que se involucran en ellas fueron consideradas como magnitudes geométricas, sin embargo parece plausible que el desarrollo de esta teoría en los pitagóricos esté conectada con la conmensurabilidad ya que el carácter realista de su matemática es responsable de que sólo se puedan aceptar ciertas construcciones que puedan ser interpretadas con independencia del sujeto como las construcciones con regla y compás.

Con un segmento de recta que se puede tomar como unidad la regla y el compás se puede construir otro segmento de recta que tenga por longitud un número (natural); en esta forma se estaría asociando números a elementos de la geometría y si "todo es número" dados dos segmentos cualesquiera con un proceso inverso de sustracción usando la regla y el compás se podría construir una unidad común que la contuvieran un número exacto de veces dando así origen a una pareja de números (y no un número racional) como resultado de esa comparación la cual se puede tomar como una razón.

La aparición de los inconmensurables provoca la primera crisis al tomarse como un camino sin salida, pero los trabajos de Hipócrates sobre la cuadratura del círculo y la perspectiva Platónica permiten el reingreso de los inconmensurables a la matemática, pues la comparación entre dos magnitudes inconmensurables del mismo tipo, se establece a través de una nueva formulación de igualdad entre razones dada por Eudoxo y usada en el Libro V de los elementos de Euclides, la cual sirve en el siglo XIX a Dedekind para dar su definición de número real como una cortadura independizando definitivamente el concepto de número de la magnitud geométrica.

Como puede observarse en este rápido recorrido histórico no es fácil encontrar en la matemática cuándo el concepto de razón aparece interpretado como un número racional, así los Babilonios, Egipcios e Hindúes hayan usado proporciones y fracciones para resolver problemas y ecuaciones, ya que en ellos no se da una organización sistemática como ya habíamos anotado.

Para ningún maestro es un misterio las dificultades que se tienen con la enseñanza y el aprendizaje de: Los números racionales, las proporciones, la regla de tres y la proporcionalidad; temas obligados en el desarrollo de cualquier curriculum, por su importancia relevante en el uso cotidiano (porcentajes, costos, tasas etc.) y como punto de partida de muchos conceptos científicos (variación, velocidad, densidad, huso horario etc.). Si examinamos sin mucho detalle como se trabajan estos temas en las escuelas y colegios, el esfuerzo se reduce a una práctica operatoria y esquemática sin profundizar en la parte conceptual y de la aplicación y a manera de ejemplo podemos citar los siguientes hechos muy frecuentes: En casi todos los textos la razón es presentada únicamente como cociente de dos números y esto equivale a creer que siempre los significado de repartición y partición son coincidentes; la fracción muy pocas veces se interpreta como una razón ; los estudiantes creen que todos los problemas de variación se pueden resolver usando regla de tres y que si una variable está relacionada funcionalmente con otra de tal manera que cuando la una aumenta la otra también entonces existe entre ellos una proporcionalidad directa.

A continuación haremos un desarrollo de estos temas intentando hacer un reconstrucción muy aproximada a la evolución histórica, pues carecemos de suficientes evidencias que nos permitan afirmar con certeza que en esta forma evolucionaron los conceptos.

La Conmensurabilidad y la razón

En los siguientes pasos se muestra un algoritmo para calcular el máximo común divisor de dos números conocido también como el algoritmo de Euclides (o método del carpintero cuando se trata de dos segmentos de recta).

36 -14 =22 ; 22- 14 = 8 ; 14 -8 = 6 ; 8 - 6 = 2 ;
6-2 = 4 ; 4 -2= 2 ; 2-2 = 0

Con lo cual concluimos que el máximo común divisor entre 36 y 14 es 2.

1. Use el mismo procedimiento para calcular el máximo común divisor entre los números naturales 42823 y 6409.

2. Use el método de divisiones sucesivas para hallar el máximo común divisor de los números anteriores y compare con el método usado en el numeral anterior . ¿Qué se puede decir entonces del algoritmo que usamos cotidianamente para dividir dos números enteros?

Consideremos un par de segmentos A y B supongamos que la longitud de A es menor a la del segmento B. Colocando A sobre el segmento B con un regla y un compás trasládelo para obtener dos posibilidades: A cabe un número exacto de veces en B, o, existe un segmento U_1 (con longitud menor al segmento A) de exceso para que la primera posibilidad no ocurra, si ocurre la primera posibilidad A sería una medida común para A y B, si se cumple la segunda posibilidad tome U_1 para compara con A como se hizo en primera instancia, de nuevo se presentan las dos posibilidades: U_1 cabría un número exacto de veces en A y por tanto U_1 sería la unidad común para A y B ¿por qué ?, si no ocurre esto existe un segmento U_2 repitiendo de nuevo el proceso. Los Pitagóricos consideraban que para cualquier par de segmentos se podía siempre conseguir una unidad común, es decir el número de pasos anterior era finito.

1. En un papel cuadriculado seleccione dos segmentos A y B de 6 y 8 cuadrículas respectivamente para construir un segmento U que sea la unidad común de A y B, ¿De cuántas cuadrículas consta B?. Encuentre dos enteros positivos m y n tales que A= mB y B = nU (mA es un segmento que se obtiene de A prolongándolo con regla y compás m veces).

2. Diremos que un par de segmentos A y B son conmensurables si existe una medida común U y un par de números enteros positivos **m** y **n** tales que A = mU , B = nU , si además los números son primos relativos entonces A y B están en la razón m a n y este hecho se notará m : n . Nótese que m y n forman una pareja de números naturales y en el momento no aparece la fracción m/n , hasta aquí la razón se presenta como una relación parte - parte si se consideran los segmentos como parte de la recta o todo-todo si cada segmento es un todo, mientras que la fracción se puede interpretar como una relación parte - todo. ¿Qué razón se establece entre los segmentos del numeral anterior?

3. Probar que si dos segmentos A y B se encuentran en la razón m : n entonces nA= mB.

4. ¿Cómo repartiría un segmento X en dos segmentos que estén en la razón 2 : 3?

5. Pruebe que si nA = mB entonces A y B están en la razón m : n.

6. El siguiente resultado fue planteado por Arquímedes “ Si a un semicírculo se le circunscribe un rectángu-

lo y se le inscribe un triángulo isósceles, luego la figura se rota sobre su eje de simetría, se obtiene un cono, una semiesfera y un cilindro con volúmenes que están en la razón 1 : 2 : 3". ¿Qué significa esto?.

7. Pruebe que si dos segmentos están en la razón m : n existe un segmento C tal que se satisfacen las igualdades siguientes : $(m+n)A = mC$, $(m+n)B = nC$ ¿Qué significado tienen estas igualdades comparadas con las obtenidas en el numeral 5?

La Proporción.

Supongamos que dos segmentos A y B se encuentran en la razón m : n esto es existe una unidad común U y m, n enteros positivos y primos relativos tales que $A= mU$, $B= nU$, si C y D son otro par de segmentos para los cuales existe otra unidad común U' tal que cumplen $C= mU'$, $D=nU'$ entonces diremos los dos pares de segmentos A, B y C, D establecen la misma razón o que son proporcionales y se notará A:B : : C:D leyéndose A es a B como C es a D.

1. Si en el contexto anterior A ,B, C, D fueran números naturales que serían las medidas comunes U, U' ?

2. En forma análoga como se establecería la definición de proporción entre números naturales ? Úsela para probar las siguientes proposiciones, sabiendo que a,b,c.d son números naturales

   $a:b :: c:d$ entonces $c = d$

a:b : : c:d entonces a:c : : b:d
a:b : : c:d entonces (a+b): (b+d) : : c:d
a:b : : c:d si y solo si ad=cb

3. Dos números están en la razón 3 :7 y su diferencia 24 luego el número mayor es?
   No use para estos problemas fracciones ni la notación m/n.

4. El número 50 ha sido dividido en tres partes que están en la razón 1 : 3 : 6, ¿Cuáles son esas partes?

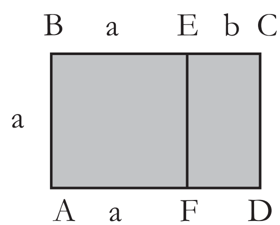
5. En un colegio la razón entre el número de niños y el número de niñas es de 2 :3 y la razón entre el número de niñas y el número de maestros es de 8 : 1. ¿Cuál es la razón entre el número total de estudiantes y el número de maestros?

La inconmensurabilidad

Como ya habíamos anotado el lema fundamental de la escuela Pitagórica podía resumirse en la frase “todo es número”, la esencia de todas las cosas geométricas, teóricas, prácticas pueden explicarse a través de las propiedades de los números naturales y sus razones; el descubrimiento de los inconmensurables (no el de los números irracionales) prácticamente destruye el edificio matemático construido sobre principios filosóficos que se muestran no confiables, la aritmética de los números naturales ya no pueden explicar este hecho pues se deben introducir elementos nuevos y no realistas contrario al pensamiento griego del momento. Mostraremos ahora ejemplos de segmentos inconmensurables en las siguientes actividades propuestas:

1. Probar que la diagonal del cuadrado de lado uno y el lado del cuadrado forman un par de segmentos inconmensurables, use argumentos geométricos de construcciones con regla y compás. También puede recurrir a la demostración actual de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos.

2. Se llama rectángulo áureo a cualquier rectángulo ABCD que tiene la propiedad de ser semejante con el subrectángulo resultante de suprimírsele un cuadrado, esto es:



a :a+ b : : b : a

   a) Construya sobre el rectángulo áureo EFCD otro rectángulo áureo, y sobre el restante otro hasta formar una sucesión infinita de rectángulos áureos.

   b) Observe lo que sucede si en un papel cuadriculado los lados del rectángulo inicial tiene medidas exactas, como explicaría este hecho ?.

c) Forme una sucesión de razones como la descrita en la parte superior, que conserve las proporciones, entre los lados de los subrectángulos resultantes.

d) Construya una sucesión con las medidas de los lados de los rectángulos áureos así largo, ancho, largo, ancho, ...etc.... luego use la definición de conmensurabilidad para probar por el absurdo que los lados del rectángulo ABCD formar una pareja de segmentos inconmensurables.

3. La proporción anterior se puede interpretar como una división de un segmento como media proporcional así:

A____a__________C____b________B

$\overline{AC} : \overline{AB} : : \overline{CB} : \overline{AC}$

Calcular el valor de la razón áurea.

4. Construya un pentágono regular ABCDE, trace sus diagonales AC, BD, CE, CA y BE en esta figura se observa una estrella de cinco puntas y un pentágono regular interior, argumente el por que los siguientes hechos : Las diagonales están divididas de tal manera que se forma una proporción áurea; El lado del pentágono y su diagonal son inconmensurables.

La proporcionalidad.

Cuando se definió la razón entre dos magnitudes del mismo tipo, (por ejemplo dos segmentos A y B), cuando ellos estaban en la razón m:n concluíamos que era equivalente a nA= mB de la cual también podemos concluir que B se ha dividido en n partes de las cuales m son de B. Lo que en nuestra notación actual la escribiríamos como A=(m/n)B en donde el significado dado a m/n es de número racional cuando m y n son números enteros, y si A y B están representado medidas de magnitudes continuas la igualdad se interpretaría como igualdad entre números reales, por tanto no sería necesario restringir el valor de m/n únicamente a los racionales, se originaría la igualdad **Y=kX** donde Y, X son variables que representan las medidas de las magnitudes A y B respectivamente, agregando que cuando esto ocurre, diremos que Y es directamente proporcional a X con constante de proporcionalidad **k** número real no nulo. (obsérvese la no necesidad de conservar la homogeneidad de las magnitudes A y B).

1. a) Probar que si Y es directamente proporcional a X, X es directamente proporcional a Y. Si Y y X representan medidas de magnitudes de diferentes tipos directamente proporcionales explicar por qué el significado dado a la constante k es el de tasa unitaria.

   b) Plantear un problema de regla de tres simple directa y solucionarlo usando únicamente la igualdad Y = kX.

c) Dar un ejemplo donde no se satisfaga la regla de tres simple directa.

d) Dar un ejemplo en donde dos variables estén relacionadas de tal manera que la una aumente cuando la otra aumente y que no sean directamente proporcionales.

2. Un trabajador gasta 5 horas en limpiar un terreno circular de 7 metros de radio. ¿Cuánto gastará en limpiar un terreno circular de 14 metros de radio ?

3. Si X representa la cantidad de artículos que se pueden comprar con Y pesos si un artículo cuesta k pesos ¿Cuál es la fórmula que relaciona Y con X ?. Si el gobierno fija una política de impuestos donde por cada facturación de esos artículos le cobra una cantidad fija de b pesos encontrar la formula que describe los costos de compra para cualquier cliente. ¿ siguen siendo Y y X directamente proporcionales ?.

4. Se dice que la variable Y es inversamente proporcional a la variable X si existe una constante k no nula tal que $y = \frac{k}{x}$. Si un gas se encuentra en un medio de temperatura constante, la presión y el volumen son inversamente proporcionales, si este se encuentra dentro de un globo esférico de 9 pulgadas de radio a una presión de 20 libras por pulgada cuadrada , si el radio del globo aumenta a 12 pulgadas, ¿Cuál es la nueva presión del gas?.

5. Si las variables están relacionadas por una ecuación del tipo $y = \frac{kxzw}{rs}$ donde k es una constante no nula, diremos que la variable **y** es directamente proporcional a **x** , **z**, **w** e inversamente proporcional a **r** , **s**. Esta combinación de relaciones directa e inversamente proporcional origina la conocida regla de tres compuesta como se aclara con el siguiente ejemplo:

Si una máquina funcionando 6 horas diarias produce 90.000 artículos en 60 días ¿ en cuantos días se producirán 192.000 artículos si trabajan 12 máquinas durante 8 horas diarias ?.

M = Número de máquinas
H = Horas diarias de funcionamiento
D = Días de funcionamiento
A = Número de artículos
Llamando k el número de artículos que cada máquina produce por hora entonces tendremos la igualdad A = kMHD , podemos calcular k con los datos del problema:

90.000 = k . 10 . 6 . 60

Con este dato podemos calcular el número de días usando los otros.

D = (10 . 6 . 60 . 192000)¸(90000 . 12 . 8)

Hacer un razonamiento similar para calcular cuántos días requieren 50 hombres trabajando 8 horas diarias para construir una obra, sabiendo que 340 hombres la hacen en 20 días trabajando 6 horas diarias

6. El peso que puede soportar una viga con sección transversal rectangular, varía proporcionalmente al ancho y al cuadrado del alto de la sección transversal e inversamente proporcional a la longitud de la viga. Si una viga de 2 pulgadas de ancho, 4 de alto y 8 pies de longitud soporta 500 libras, ¿Qué peso soportará una viga de 2x8 pulgadas de sección transversal y 10 de longitud?.

Referencias Bibliográficas

Ávila. G. (1985) Retângulo áureo, divisào áurea e seqüência de Fibonacci. Revista do Profesor de Matemática No.6. Brasilia D.F.

_______ (1985) Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de matemática. Revista do Profesor de Matemática. No. 7. Brasilia D.F.

_______ (1986) Razóes, proporçòes regra de três. Revista do Profesor de Matemática No. 8. Brasilia. D.F.

Aaboe. A. (1984) Episódios da Historia Antigua da Matemática. Coleçao funda matemática Elementar.SBM.

Boyer. C. (1986) Historia de la Matemática. La época heroica. Alianza Universidad Texto Madrid .España.

Beskin. N.M. (1986) División de un segmento en la razón dada. Lecciones Populares de Matemáticas Editorial MIR. Moscú.

Huntley. H .E. (1970) The Divine Proportions.Dover Publications.

Kurt. V.F. (1945) The Discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. Annals of Mathematics. Vol. 46. No.2.

Ros. R.M. (1996) Matemática Aplicada y relaciones de proporcionalidad. Revista EMA Vol.1. No.2 LECTURAS COMPLEMENTARIAS. Una Empresa Docente. Santa Fe de Bogotá.

Campos A. (1994). Introducción a La Lógica y La Geometría Griegas Anteriores a Euclides. Universidad Nacional Bogotá.

Swokowski. E. W.(1986) Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. México.D.F.

Mantilla..M.C. (1986) Dificultades en la solución de problemas de proporcionalidad en un grupo de estudiantes de Segundo Bachillerato del Colegio Cafam. Secretaría De Educación del Distrito Especial DIE-CEP. No. 2. Bogotá.

Editado por
Grupo Editorial Gaia
Telefax: 227 55 07
Santa Fe de Bogotá Colombia.

Este libro se diagramó
con las fuentes Garamond y Eurostaile.

Se imprimieron 200 ejemplares
Septiembre de 1999